

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA  
MAITRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE  
M.Ing.

PAR  
OLIVIER BOISSONNEAULT

MODÈLE NUMÉRIQUE HYBRIDE  
MACRO-MICRO MÉCANIQUE D'ALLIAGE  
À MÉMOIRE DE FORME

MONTRÉAL, LE 13 JUILLET 2005

© Droits réservés d'Olivier Boissonneault

CE PROJET A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Patrick Terriault, directeur de mémoire  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Franklin Wong, codirecteur  
Section arme de précision au centre de recherche et développement pour la défense  
Canada de Valcartier

M. Vladimir Brailovski, président du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Zhaoheng Liu, membre du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 20 JUIN 2005

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

# **MODÈLE NUMÉRIQUE HYBRIDE MACRO-MICRO MÉCANIQUE D'ALLIAGE À MÉMOIRE DE FORME**

Olivier Boissonneault

## **RÉSUMÉ**

L'aéronautique s'intéresse de plus en plus aux matériaux intelligents puisqu'ils permettent de remplacer certaines composantes par de minuscules mécanismes. Les alliages à mémoire de forme ont un avenir certain dans ce domaine puisqu'ils offrent un ratio force / poids très élevé. Cependant, le comportement de ceux-ci est difficilement prévisible. À cause de cela, la conception de mécanismes est difficile. Pour aider les concepteurs, la réalisation d'un modèle qui simulera les alliages à mémoire de forme est de mise. Le modèle décrit dans ce mémoire permet d'allier la simplicité des modèles phénoménologiques à l'effet de la microstructure à l'aide des modèles micromécaniques. Le modèle suivant est donc un modèle hybride qui rallie le meilleur des deux mondes. Ce modèle, combiné aux équations de transfert de chaleur, permet la conception d'actionneurs activés par effet Joule. Le modèle a été testé numériquement, c'est-à-dire à l'aide d'une étude paramétrique et expérimentalement.

# **MODÈLE NUMÉRIQUE HYBRIDE MACRO-MICRO MÉCANIQUE D'ALLIAGE À MÉMOIRE DE FORME**

Olivier Boissonneault

## **SOMMAIRE**

L'aéronautique s'intéresse de plus en plus aux matériaux intelligents puisqu'ils permettent de remplacer certaines composantes par de minuscules mécanismes. Les alliages à mémoire de forme ont un avenir certain dans ce domaine puisqu'ils offrent un ratio force / poids très élevé. Cependant, le comportement de ceux-ci n'est pas linéaire. De plus, ils comportent une hystérésis et sont grandement influencés par la température. À cause de ce comportement difficilement prévisible, la conception de mécanismes est très difficile. Pour aider les concepteurs, la réalisation d'un modèle efficace qui simulera les alliages à mémoire de forme est de mise. Le modèle décrit dans ce mémoire permet d'allier la simplicité des modèles phénoménologiques à l'effet de la microstructure à l'aide des modèles micromécaniques. Le modèle suivant est donc un modèle hybride qui rallie le meilleur des deux mondes. De plus, il permet de modéliser les alliages à mémoire de forme dans leurs domaines superélastique et effet mémoire de forme.

Ce modèle, combiné aux équations de transfert de chaleur, permet la conception d'actionneurs activés par effet Joule. Le modèle a été testé numériquement, c'est-à-dire à l'aide d'une étude paramétrique où certaines variables sont étudiées. La conclusion de cette étude a permis de connaître les variables nécessaires à la réalisation d'un actionneur rapide. Pour cela il faut avoir la résistance thermique la plus faible possible et une température ambiante la plus froide possible. Le modèle a aussi été testé à l'aide de résultats expérimentaux réalisés avec un banc d'essai spécialement conçu à cet effet. Le matériau utilisé est un fil de nitinol de 0.5 mm de diamètre. Les résultats ainsi obtenus présentent une bonne correspondance entre les résultats numériques et expérimentaux.

# **HYBRID MICRO-MACRO-MECHANICAL CONSTITUTIVE MODEL FOR SHAPE MEMORY MATERIALS**

Olivier Boissonneault

## **ABSTRACT**

Aeronautics is interested more than ever about intelligent materials since they make it possible to replace certain components by small mechanisms. The shape memory alloys have an unquestionable future in this field because they offer a very high weight to force ratio. However, the behaviour of this material is not linear. Furthermore, it has a hysteresis and is largely influenced by the temperature variations. Because it is not easy to predict this behaviour, the design of mechanisms using this material is very difficult. To help the designer, the development of an effective model which simulates the behaviour of a shape memory alloy is necessary. This report talks about a new hybrid model. The model uses a phenomenological approach for its simplicity and a micromechanics approach to simulate the behaviour of the material due to its texture. Furthermore, the model can predict the shape memory effect and the superelastic effect.

When the mechanical model is combined with a heat transfer model, actuators activated by the joule effect can be designed. A parametric study was carried out to examine the sensitivity of the output parameters to the input parameters. The results identify those parameters that most affect the transient response of the actuator. It was found that fast acting actuators need low thermal resistance and low ambient temperatures. The hybrid model was validated by experimentation with a specially-built test bench. A 0.5 mm dia. nitinol wire was used as a candidate material. The model was able to predict the measured force-displacement data and literature data.

## **REMERCIEMENTS**

En premier lieu, j'aimerais remercier M. Franklin Wong de RDDC Valcartier pour son soutien ainsi que l'encadrement constant qu'il m'a offert tout au long de la réalisation de ce projet. Je tiens à le remercier aussi pour le soutien financier qu'il m'a apporté, sans quoi ce mémoire n'aurait été le même. Il a su m'ouvrir les portes vers de nouveaux horizons. Pour ces raisons, je ne pourrais le remercier suffisamment.

Je tiens à remercier aussi M. Patrick Terriault et M. Vladimir Brailovski qui ont eu confiance en moi et qui m'ont permis de découvrir un domaine de recherche des plus intéressants.

Je remercie également tous mes compagnons de travail qui ont permis la réalisation de ce projet dans une atmosphère de bien-être et d'entraide. Que ce soit les gens de RDDC ou les gens du LAMSI, un merci sincère.

Une attention toute particulière à ma famille et à mes amis pour leur constant soutien tout au long de mes études collégiales et universitaires. Que ce soit par les moments de détente qu'ils ont pu me procurer ou par le soutien financier qu'ils m'ont apporté.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE .....	i
ABSTRACT .....	ii
REMERCIEMENTS .....	iii
TABLE DES MATIÈRES.....	iv
LISTES DES TABLEAUX.....	vii
LISTE DES FIGURES.....	viii
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES .....	xiii
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 LES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME .....	4
1.1 Historique.....	4
1.2 Famille d'alliage .....	7
1.3 Notions de base .....	8
1.3.1 Variantes de martensite .....	12
1.3.2 Martensite autoaccomodante et martensite orientée .....	14
1.3.3 Phase rhomboédrique .....	14
1.3.4 Effet mémoire de forme .....	15
1.3.5 Effet mémoire double sens.....	20
1.3.6 Effet superélastique .....	21
1.3.7 Effet amortissant .....	22
1.4 Exemple d'application .....	22
1.4.1 Secteur aérospatial .....	22
1.4.2 Secteur industriel.....	27
1.4.3 Secteur biomédical .....	29
CHAPITRE 2 LES MODÈLES NUMÉRIQUES D'AMF .....	32
2.1 Les modèles existants.....	32
2.1.1 Les modèles thermodynamiques ou macroscopiques .....	32
2.1.2 Les modèles micromécaniques .....	34

2.1.3	Les modèles phénoménologiques .....	35
2.1.3.1	Interpolation .....	35
2.1.3.2	Tanaka .....	38
2.2	Modèle hybride macro-micro mécanique .....	40
2.2.1	Matrice de distorsion .....	41
2.2.2	Matrice de rotation .....	49
2.2.3	Notions de micromécanique .....	54
2.2.4	Proportion de martensite et de phase R .....	56
2.2.4.1	Proportion de martensite orientée .....	58
2.2.4.2	Proportion de martensite autoaccomodante .....	60
2.2.4.3	Proportion de martensite globale .....	61
2.2.4.4	Proportion de phase R .....	61
2.2.4.5	Proportion de phase R globale .....	62
2.2.5	Variante de martensite numérique .....	63
2.3	Modèle de transfert thermique .....	64
2.3.1	Hypothèse et équation de base .....	64
2.3.2	Bilan thermique .....	66
2.3.3	Énergie emmagasinée .....	66
2.3.4	Température de l'AMF .....	67
CHAPITRE 3 ÉTUDE PARAMÉTRIQUE DU MODÈLE .....		69
3.1	Test sur le modèle mécanique .....	72
3.1.1	Effet mémoire de forme .....	72
3.1.2	Effet superélastique .....	75
3.1.3	Hystérésis de température .....	78
3.1.4	Sous-cycle de transformation .....	79
3.1.5	Influence de la microstructure .....	80
3.1.5.1	Nombre de grains .....	80
3.1.5.2	Textures .....	82
3.1.6	Influence du coefficient de Poisson .....	84
3.2	Test sur le modèle thermique .....	85
3.2.1	Température du fil d'AMF .....	85
3.2.2	Influence de la résistance thermique .....	87
3.2.3	Influence de la chaleur spécifique .....	89
3.2.4	Influence de la chaleur latente .....	91
3.2.5	Influence de la température ambiante .....	93
3.2.6	Influence du diamètre du fil .....	95
CHAPITRE 4 CARACTÉRISATION DU MATÉRIAU ET MÉTHODOLOGIE .....		99
4.1	Échantillon .....	99
4.2	Traitement thermique .....	100
4.3	Stabilisation et fatigue de l'échantillon .....	101



4.4	Essais mécaniques .....	104
4.4.1	Diagramme de phase et module Young .....	104
4.5	Essais thermiques .....	108
CHAPITRE 5 VALIDATION DU MODÈLE .....		114
5.1	Discussion de l'étude paramétrique .....	114
5.2	Discussion et comparaison des résultats statiques .....	115
5.2.1	Effet mémoire de forme .....	115
5.2.2	Effet superélastique .....	116
5.3	Discussion et comparaison des résultats dynamiques .....	118
5.3.1	Variation du profil de courant .....	118
CONCLUSION .....		125
RECOMMANDATIONS .....		127
ANNEXES .....		128
1-	Description du programme .....	129
2-	Code MATLAB des différentes fonctions .....	135
3-	Article de la conférence SPIE 2005 .....	155
4-	Courbes nécessaires à la réalisation du diagramme de phase .....	168
BIBLIOGRAPHIE .....		173

## LISTES DES TABLEAUX

	Page
Tableau I	Propriétés des AMF selon leur famille [15] ..... 8
Tableau II	Exemple de différence entre les propriétés de l'austénite et de la martensite pour un alliage TiNi ..... 12
Tableau III	Relations nécessaires aux calculs de la phase R ..... 62
Tableau IV	Les trois variantes numériques de martensite possibles..... 63
Tableau V	Propriétés du matériau utilisé pour l'étude paramétrique ..... 70
Tableau VI	Température de transformation du matériau pour une contrainte de 300 MPa ..... 86
Tableau VII	Composition de l'alliage de nitinol utilisé ..... 99
Tableau VIII	Variables nécessaires pour le modèle thermique ..... 112
Tableau IX	Variables thermiques répertoriées dans la littérature..... 113

## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1	Chasseur américain F-14 [8] ..... 5
Figure 2	Stent ..... 6
Figure 3	Diagramme de phase simplifiée ..... 10
Figure 4	Structure atomique de l'austénite et de la martensite ..... 11
Figure 5	Schématisation 2D de l'austénite et de la martensite ..... 11
Figure 6	Plan invariant ou plan d'habitat [18] ..... 13
Figure 7	Représentation stéréographique des 24 variantes de martensite [19] ..... 14
Figure 8	Effet mémoire de forme étape par étape ..... 16
Figure 9	Mémoire de forme pour $T < M_f$ ..... 17
Figure 10	Mémoire de forme pour un échantillon 100% austénitique ..... 18
Figure 11	Diagramme d'état pour une reprise de forme qui débute avec $M_s$ < $T < A_s$ ..... 18
Figure 12	Exemple typique d'effet mémoire de forme ..... 20
Figure 13	Effet superélastique d'un alliage à mémoire de forme ..... 21
Figure 14	Comparaison de différents matériaux [21] ..... 23
Figure 15	Télescope Hubble lancé en avril 1990 [22] ..... 24
Figure 16	Satellite Clémentine lancé le 25 janvier 1994 [23] ..... 25
Figure 17	Frangibolt de la compagnie TiNi Alloy Aerospace Inc de San Leandro [24] ..... 25
Figure 18	Station orbitale MIR [25] ..... 26
Figure 19	Couplage thermomécanique ..... 27
Figure 20	Micro actuateur pour la robotique ..... 28
Figure 21	Lunette avec monture superélastique [26] ..... 28
Figure 22	Stent cardiovasculaire comprimé [27] ..... 29
Figure 23	Stent cardiovasculaire relâché [27] ..... 30
Figure 24	Valve cardiaque [28] ..... 30

Figure 25	Broche d'orthodontie [29].....	31
Figure 26	Équilibre thermodynamique des AMF [34] .....	33
Figure 27	Proportion de martensite macroscopique.....	34
Figure 28	Proportion de martensite microscopique.....	35
Figure 29	Modèle bilinéaire selon Müller et Xu .....	36
Figure 30	Modèle bilinéaire selon Brandon et Rogers .....	36
Figure 31	Modèle bilinéaire selon Gillet, Patoor et Berveiller .....	37
Figure 32	Modèle de krigeage de Terriault [17] .....	38
Figure 33	Exemple de déformation pour une matrice D (élongation).....	41
Figure 34	Exemple de déformation pour une matrice D (cisaillement) .....	42
Figure 35	Mailles d'austénite .....	43
Figure 36	Changement de référentiel et création d'une nouvelle maille d'austénite.....	43
Figure 37	Maille de martensite dans le référentiel $i', j'$ et $k'$ .....	44
Figure 38	Différents paramètres de mailles pour la martensite.....	47
Figure 39	Rotation autour de $z$ .....	50
Figure 40	Rotation autour de $x$ .....	50
Figure 41	Rotation autour de l'axe $Z$ .....	51
Figure 42	Rotation 2D autour de $Z$ .....	52
Figure 43	Proportion de martensite selon Brinson pour une température donnée.....	57
Figure 44	Proportion de martensite selon le modèle hybride pour une température donnée.....	58
Figure 45	Diagramme de phase .....	60
Figure 46	Schématisation et référentiel de l'AMF .....	65
Figure 47	Processus itératif pour le calcul de la température.....	68
Figure 48	Diagramme de phase du matériau fictif .....	69
Figure 49	Effet mémoire de forme débutant à 100 % austénite à $T=275$ K.....	73
Figure 50	Effet mémoire de forme débutant 100 % martensite à $T=150$ K.....	74
Figure 51	mémoire de forme 3D .....	75
Figure 52	Effet superélastique à $T = A_f$ .....	77

Figure 53	Effet superélastique à $T = 350\text{ K}$ , $T = 375\text{ K}$ et $T = 450\text{ K}$ .....	77
Figure 54	Effet superélastique et mémoire de forme à $T = 315\text{ K}$ .....	78
Figure 55	Hystérésis de température à contrainte = 300 MPa et essais de traction à $T = 245, 260, 280, 350, 365$ , et $380\text{ K}$ .....	79
Figure 56	Sous-cycle calculé pour $T=350\text{ K}$ .....	80
Figure 57	Déformation de transformation maximum, minimum et moyenne en fonction du nombre de grains .....	81
Figure 58	Écart type en fonction du nombre de grains .....	82
Figure 59	Représentation de la texture à l'aide du référentiel global et local ....	83
Figure 60	Effet de la texture en fonction de l'orientation .....	84
Figure 61	Température de l'échantillon en fonction du temps.....	86
Figure 62	Température en fonction du temps pour différentes valeurs de résistance thermique .....	88
Figure 63	Déformation en fonction du temps pour différentes valeurs de résistance thermique .....	89
Figure 64	Température en fonction du temps pour différentes valeurs de chaleur spécifique .....	90
Figure 65	Déformation en fonction du temps pour différentes valeurs de chaleur spécifique .....	91
Figure 66	Température en fonction du temps pour différentes valeurs d'énergie latente.....	92
Figure 67	Déformation en fonction du temps pour différentes valeurs d'énergie latente.....	93
Figure 68	Température en fonction du temps pour différentes valeurs de température ambiante.....	94
Figure 69	Déformation en fonction du temps pour différentes valeurs de température ambiante.....	95
Figure 70	Valeur de la résistance thermique en fonction du diamètre du fil .....	97
Figure 71	Température en fonction du temps pour différentes valeurs de diamètre .....	98
Figure 72	Variation des températures de transformation en fonction de la température du traitement thermique d'une durée de une heure [76].....	101
Figure 73	Essai de traction pour différentes températures et différents nombres de cycles.....	103

Figure 74	Essais de traction à une température de 35°C .....	105
Figure 75	Diagramme de phase réalisé après analyse des résultats .....	106
Figure 76	Essai de traction à une température de 338 degrés Kelvin .....	107
Figure 77	Essai de traction à une température de 303 degrés Kelvin .....	108
Figure 78	Schématisation du banc d'essai .....	109
Figure 79	Image du banc d'essai sans couvercle .....	110
Figure 80	Image du banc d'essai avec couvercle.....	111
Figure 81	Courbe expérimentale et numérique pour un essai de traction à mémoire de forme (T=273 K).....	116
Figure 82	Courbe expérimentale et numérique pour un essai de traction superélastique (T=308 K) .....	117
Figure 83	Courbe expérimentale et numérique pour un essai de traction superélastique à la température de transformation Af (T=303 K)...	118
Figure 84	Comparaison des résultats pour un profil de courant en sinus à une fréquence de 0.05 Hz .....	119
Figure 85	Comparaison des résultats pour un profil de courant en sinus à une fréquence de 0.01 Hz .....	120
Figure 86	Comparaison des résultats pour un profil d'onde carré de fréquence 0.05 Hz et un cycle de travail de 25 % .....	121
Figure 87	Comparaison des résultats pour un profil d'onde carré de fréquence 0.05 Hz et un cycle de travail de 50 % .....	122
Figure 88	Comparaison des résultats pour un profil d'onde carré de fréquence 0.1 Hz et un cycle de travail de 50 % .....	123
Figure 89	Essai de traction à T=308K.....	124
Figure 90	Fonction H.....	130
Figure 91	Fonction maxmin .....	131
Figure 92	Fonction wongb.....	132
Figure 93	Fonction actuateur.....	133
Figure 94	Essai de traction à T = 273 K.....	169
Figure 95	Essai de traction à T = 283 K.....	169
Figure 96	Essai de traction à T = 293 K.....	170
Figure 97	Essai de traction à T = 303 K.....	170
Figure 98	Essai de traction à T = 308 K.....	171

Figure 99	Essai de traction à $T = 318\text{ K}$ .....	171
Figure 100	Essai de traction à $T = 328\text{ K}$ .....	172
Figure 101	Essai de traction à $T = 338\text{ K}$ .....	172

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

$a$	Paramètre de maille de la martensite
$a_o$	Paramètre de maille de l'austénite
$A$	Austénite
$A_f$	Température de fin de transformation pour l'austénite
AMF	Alliage à mémoire de forme
$A_s$	Température de début de transformation pour l'austénite
$\alpha$	Angle d'Euler
$[\alpha]$	Matrice de rotation
$\alpha_{mn}$	Matrice de rotation
$[\alpha]^T$	Matrice de rotation transposée
$b$	Paramètre de maille de la martensite
$b_o$	Paramètre de maille de l'austénite
$\beta$	Paramètre de maille de la martensite
$\beta$	Angle d'Euler
$c$	Paramètre de maille de la martensite
$c_o$	Paramètre de maille de l'austénite
$C_p$	Chaleur spécifique
$D$	Module de Young
$D_{ik}$	Matrice de Bain ou de distorsion
$E_a$	Module de Young de l'austénite
$E_m$	Module de Young de la martensite
$E_R$	Module de Young de la phase R
$\epsilon$	Déformation
$\epsilon_{elas}$	Déformation élastique macroscopique
$\epsilon_L$	Déformation résiduelle maximum
$\epsilon_{th}$	Déformation macroscopique de température (dilatation)
$\epsilon_{totale}$	Déformation macroscopique
$\epsilon_{tr}$	Déformation macroscopique de transformation
$\epsilon^{Tr}$	Micro déformation de transformation dans le référentiel global
$\epsilon^{\mu}$	Micro déformation de transformation dans le référentiel du grain



$\Phi_M$	Proportion de martensite globale
$\Phi_R$	Proportion de phase R globale
$\Phi_n^\sigma$	Proportion de martensite orientée du grain n
$\Phi_{no}^\sigma$	Proportion de martensite orientée du grain n à l'état initial
$\Phi_n^T$	Proportion de martensite autoaccomodante du grain n
$\gamma$	Angle d'Euler
H	Énerghie latente
H(x)	Fonction Heaviside
I	Courant passant dans le fil
m	masse du fil
M	Martensite
$M_f$	Température de fin de transformation pour la martensite
$M_s$	Température de début de transformation pour la martensite
N	Nombre de grains
$\Omega$	Tenseur de transformation
$R_{elec}$	Résistance électrique du fil
$R_f$	Température de fin de transformation pour la phase R
$R_s$	Température de début de transformation pour la phase R
$R_{ther}$	Résistance thermique du fil
$\rho$	densité
$\rho_{elec}$	Résistivité
$\sigma$	Contrainte
$\sigma_{Af}$	Contrainte critique de fin de transformation de la martensite
$\sigma_{As}$	Contrainte critique de début de transformation de la martensite
$\sigma_{Mf}$	Contrainte critique de fin de transformation de la martensite
$\sigma_{Ms}$	Contrainte critique de début de transformation de la martensite
T	Température
$T_s$	Température à la surface du fil
$\theta$	Taux de variation de la contrainte par rapport à la température
$\xi$	Proportion de martensite

## INTRODUCTION

C'est dans le cadre d'un projet d'« Active flow control » que ce mémoire a été écrit. En effet, ce mémoire se trouve au confluent de plusieurs disciplines distinctes : l'aérodynamisme, le contrôle, la micro fabrication, les *compliant mechanisms* et les matériaux intelligents. Cette dernière discipline fait d'ailleurs l'objet de ce mémoire.

L'« active flow control » permet de diriger un objet aérodynamique, par exemple un avion ou un missile, en perturbant l'écoulement autour de lui. La turbulence engendrée crée une force sur l'objet et par le fait même, permet son orientation. Les principaux concepts développés à ce jour modifient l'écoulement autour de l'objet par des dispositifs d'actionneurs miniaturisés qui font partie du revêtement ou de la structure de ce dernier. Afin de permettre la miniaturisation d'actionneur, l'utilisation des matériaux intelligents est fortement conseillée.

Les matériaux intelligents s'accommodent aux conditions d'utilisation puisqu'ils peuvent modifier leurs propriétés. De plus, ces matériaux sont considérés comme multifonctionnels. En effet, il est possible de les utiliser comme actionneurs ou comme capteurs. Leur utilisation est donc appropriée dans le cadre de ce projet puisqu'il est possible de remplacer un mécanisme complexe à plusieurs pièces par une simple pièce en matériau intelligent.

Ces matériaux se caractérisent par leur capacité à générer un travail sous l'action d'un couplage généralement réversible. Par exemple, un couplage de type électroélastique (électrostriction, piézoélectricité), magnétoélastique (magnétostriction, piézomagnétisme) ou thermoélastique (alliages à mémoire de forme). Il existe donc une multitude de matériaux dits intelligents, chacun ayant ses avantages et ses inconvénients.

Pour la réalisation de ce projet, les alliages à mémoire de forme ont été choisis puisqu'ils offrent un ratio force / poids élevé. Ces alliages présentent quatre caractéristiques particulières : l'effet mémoire de forme simple sens et double sens, la superélasticité et l'effet d'amortissement. Ces quatre caractéristiques sont d'ailleurs expliquées dans un des chapitres de ce mémoire.

Cependant, le comportement des alliages à mémoire de forme est complexe. En effet, ces matériaux possèdent une hystérésis dans le domaine déformation contrainte. De plus, cette hystérésis varie aussi en fonction de la température. Un modèle est donc nécessaire afin de prédire le comportement du matériau et de voir s'ils peuvent répondre aux exigences de force et de dynamique tout en respectant les contraintes dimensionnelles et thermiques du projet. Ce modèle permettra de valider le choix du système d'activation du projet.

Le modèle développé est un modèle d'AMF hybride de macro et micro mécanique couplé à un modèle électrothermique puisque le chauffage s'effectue par effet Joule. Cela permet d'obtenir un modèle numérique complet qui prend comme arguments les conditions initiales, les conditions aux frontières ainsi que la contrainte appliquée et le courant injecté. Le résultat obtenu est composé de la déformation engendrée ainsi que des conditions nécessaires à la prochaine itération.

Le premier chapitre débute avec une description du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme. Cette étape est essentielle pour la compréhension du modèle et explique les mécanismes qui régissent le comportement des AMF. Finalement, à titre de culture générale, un bref historique et quelques applications sont exposés.

Le deuxième chapitre décrit les équations utilisées dans le modèle mécanique et thermique développé dans le cadre de ce projet. Certaines variables nécessaires à la

compréhension sont également définies. Ce chapitre contient aussi une revue bibliographique des modèles existants. Il explique le fonctionnement des trois grandes catégories de modèle : les modèles thermodynamiques, les modèles micromécaniques et les modèles phénoménologiques. Cette étape a permis de justifier le type de modèle développé dans le cadre de ce projet.

Le chapitre trois, pour sa part, contient et explique les résultats obtenus lors de l'étude paramétrique. Cette étude permet de connaître l'impact de certaines variables sur le comportement de l'alliage à mémoire de forme. Il est par la suite plus simple de contrôler les variables ciblées afin d'obtenir les résultats souhaités.

Finalement, le chapitre quatre explique comment trouver les variables du modèle sur un échantillon physique à partir d'expériences simples. Le cinquième chapitre, quant à lui, présente une comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques obtenus. Ce chapitre permet de suggérer différentes techniques pour fabriquer un actionneur rapide et ainsi d'en améliorer les performances.

## CHAPITRE 1

### LES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME

Les alliages à mémoire de forme sont communément appelés AMF (en anglais SMA pour *shape memory alloy*). Ils sont, de nos jours, de plus en plus connus et utilisés. Plusieurs applications ont vu le jour au cours des dernières décennies dans plusieurs domaines tels que, le domaine biomédical, l'aérospatiale, la robotique et bien d'autres. Dans tous ces domaines d'application, les AMF sont utilisés soit pour leur propriété de mémoire de forme, soit pour leur propriété superélastique, soit pour leur effet amortissant. Malgré le fait qu'ils soient de plus en plus connus et utilisés, ils demeurent coûteux comparativement aux autres matériaux plus communs. Par contre, dans certaines situations, ils peuvent devenir économiquement rentables puisqu'il est possible de remplacer des dispositifs très complexes par un simple dispositif d'AMF. L'analyse des besoins est donc une étape très importante. Ce chapitre a comme objectif de donner les concepts de base afin de bien comprendre tous les enjeux liés au AMF.

#### 1.1 Historique

Les AMF ont été développés dans les années 30 par la découverte d'un alliage d'or-cadmium. Selon Liberman [1], Arne Ölander est le père des AMF et il a fait part de sa découverte à la communauté scientifique pour la première fois lors de la conférence de la Swedish Metallographic Society, le 27 mai 1932. Dans la même année, il a publié un article intitulé « An electrochemical investigation of solid cadmium-gold alloys » [2]. À ce moment, les gens pouvaient reconnaître les propriétés des AMF, mais ils ne pouvaient expliquer les phénomènes physiques qui les régissent. Kurdyumov et Khandros [3-5] ont publié certains articles à la fin des années 40 pour décrire le phénomène, mais il a fallu attendre jusqu'en 1951, après la publication de Chang et Read [6], pour comprendre tous les aspects fondamentaux des AMF.

Dans les années qui ont suivi, d'autres alliages ont été découverts, mais leur commercialisation n'était pas encore envisagée à cause des coûts trop élevés et de toutes les autres complications nécessaires à la réalisation de tels matériaux. Ce n'est qu'à partir des années 60, lorsque Buehler et ses collègues de la U.S. Naval Ordnance Laboratory de San Diego ont découvert un alliage equiatomique de titane et de nickel, que l'industrie commença à s'intéresser aux AMF. Cet alliage est maintenant mieux connu sous son acronyme, le nitinol, donné en l'honneur de leurs fondateurs (Nickel Titane Naval Ordnance Laboratory). Il a dès lors eu quelques succès industriels. En 1969, la compagnie Raychem a développé un manchon de raccordement pour les conduites hydrauliques du célèbre chasseur américain, le F-14 [7].

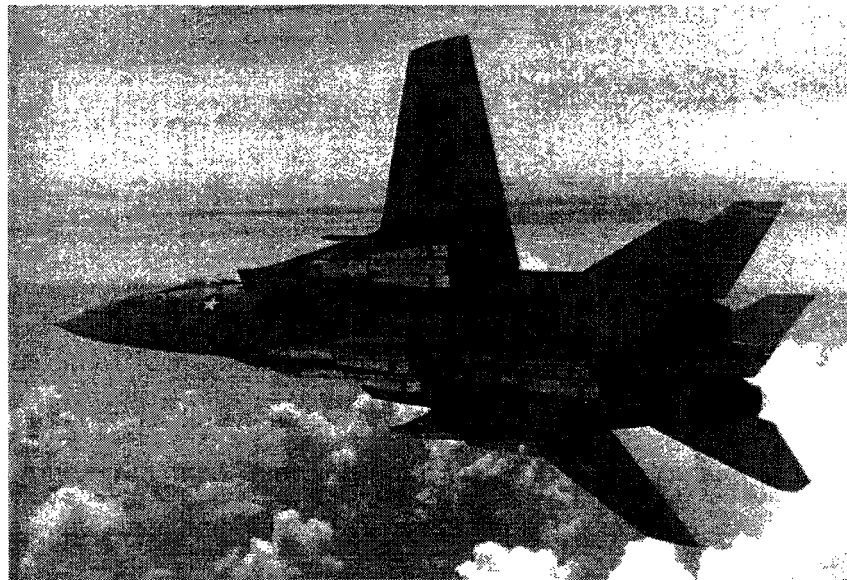


Figure 1 Chasseur américain F-14 [8]

Selon Jorma Ryhänen [9], les premiers efforts déployés pour exploiter le potentiel du nitinol comme implants médicaux ont été réalisés par Johnson et Alicandri en 1968 [10]. Dès lors, dans les années 70, il y a eu quelques applications [10-13]. Cependant, le premier succès biomédical a eu lieu au milieu des années 90 avec la réalisation d'un

stent en nitinol qui permet de régler les problèmes du aux artères bloquées (voir la figure 2).

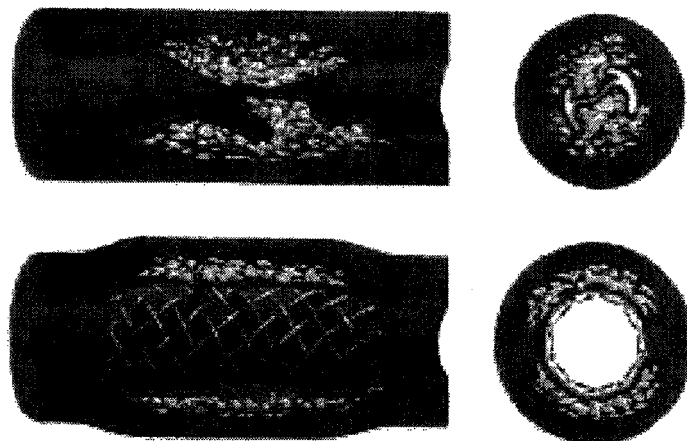


Figure 2 Stent

Au commencement, la conception de dispositifs à base d'AMF était plutôt difficile à réaliser. En effet, les AMF ont un comportement difficile à prédire, il en résulte donc des coûts de conception et/ou de prototypage très élevés. En revanche, avec l'arrivée des ordinateurs dans les années 90, des modèles numériques et d'une compréhension améliorée de la fabrication et des phénomènes physiques qui régissent les AMF, la prédiction du comportement thermomécanique est de plus en plus facile et rend ainsi possible la conception de dispositifs plus complexes. De fait, les expérimentations sont de moins en moins nécessaires, ce qui réduit ainsi les coûts de conception. Finalement, dans les années à venir, les modèles répondront probablement mieux aux comportements des AMF et ces derniers auront beaucoup plus de chances de prendre une place importante dans l'industrie.

D'ailleurs, l'avancement de la recherche et l'intérêt de l'industrie pour les AMF a provoqué la mise sur pied de deux conférences scientifiques d'envergure internationale,

soit la SMST (Shape Memory and Superelastic Technologies) et l'ICOMAT (International Conference On Martensitic Transformation) [14].

## **1.2 Famille d'alliage**

Il existe plusieurs familles d'AMF. Les plus connues sont les alliages titane-nickel (Ti-Ni) et les alliages cuivreux (Cu-Zn-Al, Cu-Al-Ni, Cu-Al-Be), car ils possèdent de bonnes propriétés thermomécaniques tout en ayant des prix industriellement compétitifs. À l'opposé, les alliages d'or (Au-Cd, Cu-Au-Zn) et d'argent (Ag-Cd) sont coûteux et n'ont donc que des intérêts scientifiques puisqu'ils ne sont pas commercialisables. Finalement, ils existent des alliages de Fer (Fe-Mn-Cr-Ni-Si, Fe-Cr-Ni-Co-Mn-Si) peu coûteux, mais possédant des propriétés thermomécaniques plutôt limitées. De plus, même avec l'ajout de chrome, ces alliages ne supportent pas bien les milieux corrosifs.

Le tableau suivant présente différents alliages et donne une idée des propriétés de ces derniers.



Tableau I  
Propriétés des AMF selon leur famille [15]

Propriétés	Unités	Ni-Ti	Cu-Zn-Al	Cu-Al-Ni	Cu-Al-Be
Point de fusion	°C	1260-1310	950-1020	1000-1050	970-990
Densité	Kg/m <sup>3</sup>	6400-6500	7800-8000	7100-7200	7300
Résistivité électrique (aust-mart)	$\Omega \cdot m \times 10^{-6}$	0,5-1,1	0,7-0,12	0,1-0,14	0,07-0,09
Conductivité thermique à l'ambiante	W/(m.K)	10-18	120	75	
Coefficient de dilatation (aust-mart)	$10^{-6} K^{-1}$	6,6-10	17	17	
Chaleur spécifique	J/(Kg.k)	490	390	440	
Enthalpie de transformation	J/Kg	28000	7000	9000	7200
Module de Young	Gpa	95	70-100	80-100	90
Résistance à la traction	Mpa	800-1000	800-900	1000	900-1000
Allongement à rupture (en martensite)	%	30-50	15	8-10	15
Limite de fatigue en austénite	Mpa	350	270	350	
Taille de grain	$\mu m$	20-100	50-300	30-300	100-500
Domaine de transformation	°C	-100 à 100	-100 à 100	-100 à 170	-200 à 150
Hystérésis ( $A_s - M_s$ )	°C	20-40	10-20	20-25	20-25
Étalement ( $A_s - A_f$ )	°C	30	10-20	20-30	15-20
Déformation maximale:					
- mémoire simple effet		8	3-5	3-6	3-5
- mémoire double effet		5	2	3	2
Cycle (N)= $10^2$	%	5	1	1,2	
Cycle (N)= $10^5$		2	0,8	0,8	
Cycle (N)= $10^7$		0,5	0,5	0,5	
Température max. d'utilisation (1 heure)	°C	400	160	300	400
Déformation superélastique maximale:					
- polycristal	%	4	2	2	3
- monocristal		10	10	10	10
Amortissement	SDC-%	15	30	10	
Résistance à la corrosion		Excellente	Moyenne	Bonne	Moyenne
Biocompatibilité		Bonne	Mauvaise	Mauvaise	Mauvaise

### 1.3 Notions de base

Les AMF doivent leurs caractéristiques à la présence de deux phases à l'état solide. Comme pour l'acier, la phase basse température est appelée martensite tandis que la phase haute température, dite *phase mère*, est appelé austénite. Le changement de phase dans les aciers et les alliages à mémoire de forme est similaire. Selon Cohen, Olson et Clapp [7], on parle de transformation martensitique, en l'honneur du célèbre métallurgiste allemand Adolf Martens, lorsque cette dernière :

1. est sans diffusion, c'est-à-dire que les atomes ne se déplacent pas sur de longues distances,

2. implique une déformation homogène du réseau qui conduit à un changement de forme macroscopique,
3. est caractérisée par une déformation déviatorique, c'est-à-dire sans changement de volume.

Cependant, une analyse détaillée de la transformation des alliages à mémoire de forme révèle qu'il y a un léger changement de volume. Par contre, ce dernier est très faible comparé au changement de forme. La transformation est donc quand même considérée martensitique. Toutefois, contrairement aux aciers, les températures de transformation sont beaucoup plus basses et se situent entre moins 100 et plus 200 degrés Celsius selon l'alliage utilisé. Ces températures de transition dépendent aussi de l'historique de l'alliage, c'est-à-dire des traitements thermomécaniques ou des procédés de fabrication, ou encore de la combinaison des deux. De plus, il y a quatre températures qui caractérisent les AMF : les températures de début et de fin de transformation inverse,  $A_s$  pour *austénite start* et  $A_f$  pour *austénite finish*, ainsi que les températures de début et de fin de transformation directe,  $M_s$  pour *martensite start* et  $M_f$  pour *martensite finish*. Finalement, ces quatre températures dépendent de la contrainte appliquée, mais heureusement, elles varient linéairement selon la relation de Clausius-Clayperon. Voici donc, à la figure 3, un diagramme d'état simplifié représentant bien un AMF.

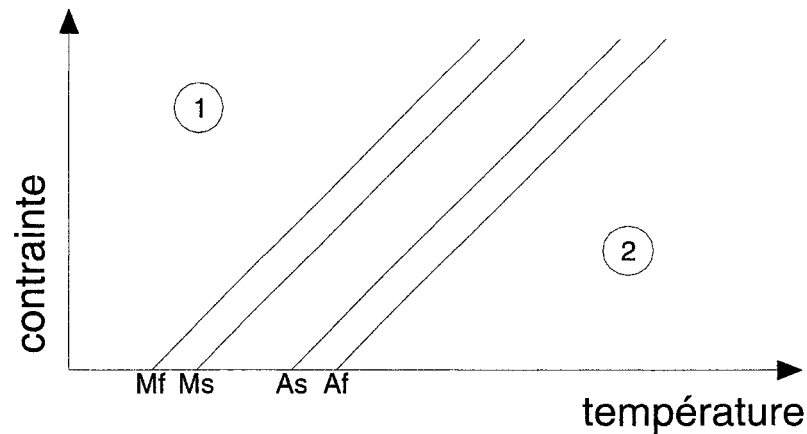


Figure 3 Diagramme de phase simplifiée

Bien qu'il existe certains alliages possédant  $A_s < M_s$ , il sera plus facile de comprendre les concepts de base en considérant  $M_f < M_s < A_s < A_f$ , comme l'illustre la figure 3. On retrouve donc pour  $T < M_f$ , représenté par la zone 1, 100 % de martensite. À l'opposé, pour  $T > A_f$  représenté par la zone 2, on retrouve 100 % d'austénite. Entre les deux zones, on retrouve une coexistence des deux phases. La proportion dépend alors des conditions de chargement thermique et/ou mécanique antérieures. Finalement, le dernier concept important pour comprendre les propriétés des AMF réside dans le fait que l'austénite a un réseau cristallin cubique et que la martensite a un réseau monoclinique comme à la figure 4.

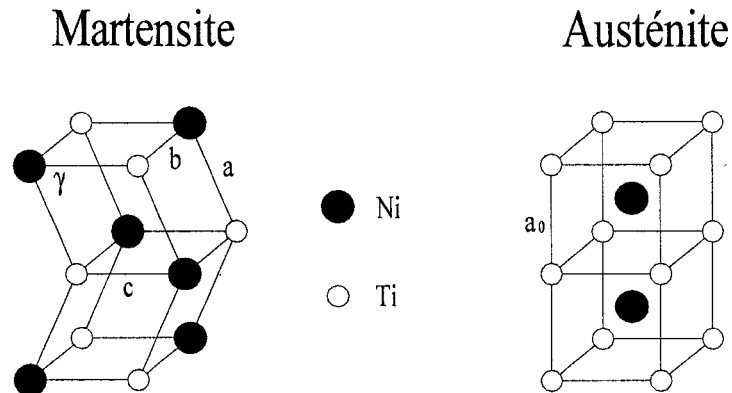


Figure 4 Structure atomique de l'austénite et de la martensite

Sans élaborer plus profondément sur le sujet, on peut représenter conceptuellement en 2D l'austénite par un carré et la martensite par un parallélogramme qui représente le cisaillement créé lors de la transformation (figure 5). Cette analogie est fort utile pour expliquer les phénomènes de transformation décrits dans les sections suivantes.

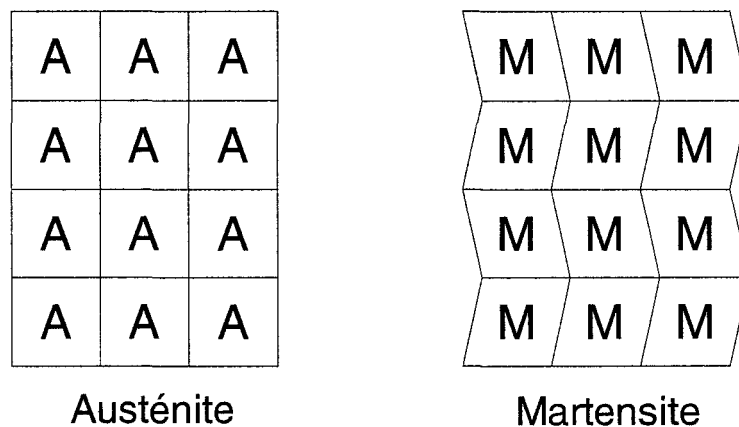


Figure 5 Schématisation 2D de l'austénite et de la martensite

Puisqu'ils n'ont pas la même structure cristalline, ils ont, par le fait même, des propriétés différentes. D'ailleurs, la majorité des auteurs utilisent des propriétés différentes.

L'auteur David John Barrett [16] propose dans son article des modules de Young et des coefficients thermiques différents pour l'austénite et la martensite. Ces données se retrouvent dans le tableau II.

Tableau II

Exemple de différence entre les propriétés de l'austénite et de la martensite pour un alliage TiNi

Propriété	Valeur
$E_m$ (MPa)	13 000
$E_a$ (MPa)	30 000
$\alpha_m$ ( $\mu\epsilon/^\circ C$ )	6.6
$\alpha_a$ ( $\mu\epsilon/^\circ C$ )	11

### 1.3.1 Variantes de martensite

Afin de bien comprendre les AMF, il est important de savoir ce qu'est une variante de martensite. Comme défini précédemment, le changement de phase est caractérisé par un changement de structure. De plus, le changement de phase est dit du premier ordre puisque le changement de phase ne s'exécute pas instantanément et qu'il peut y avoir coexistence des deux phases à un moment donné [17]. De plus, il existe un plan invariant aussi appelé plan d'habitat entre les deux structures atomiques. Par exemple, la figure 6 représente un carré d'austénite et un parallélogramme de martensite, mais le plan horizontal du bas n'a aucunement changé. On parle donc de plan invariant.

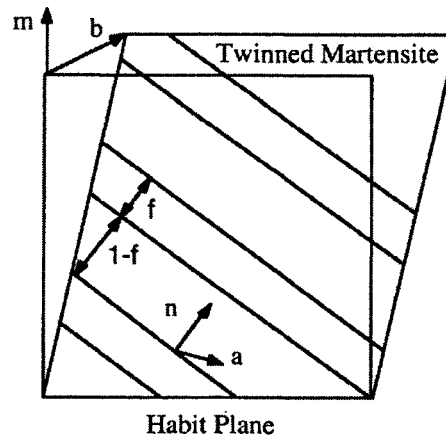


Figure 6 Plan invariant ou plan d'habitat [18]

Dans la schématisation de la figure 5, on remarque qu'il y a deux types de parallélogramme : le premier est cisailé vers la droite tandis que le deuxième l'est vers la gauche. Chaque parallélogramme représente une variante de martensite. Une variante de martensite est donc de la martensite dont la structure atomique est orientée dans un axe différent. Évidemment, la figure 5 est une schématisation. Dans la réalité, il existe 24 variantes de martensite. D'ailleurs, la figure 7 représente la normale du plan invariant des 24 variantes de martensite à l'aide d'une représentation 3D stéréographique.

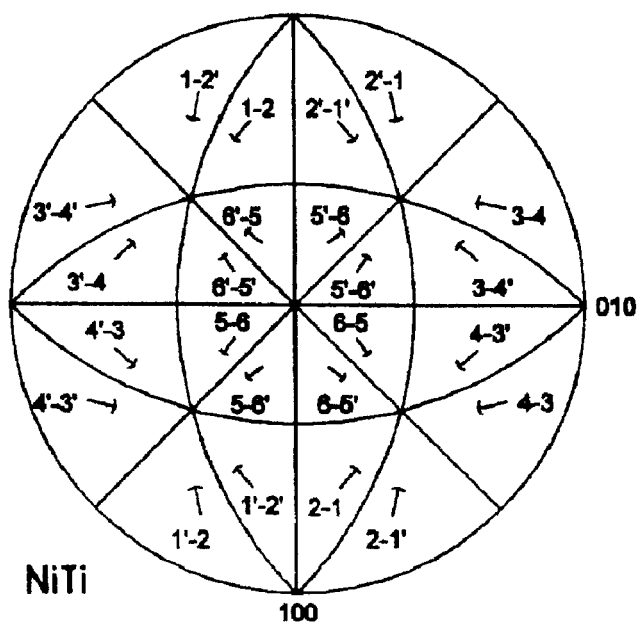


Figure 7 Représentation stéréographique des 24 variantes de martensite [19]

### 1.3.2 Martensite autoaccomodante et martensite orientée

La notion de variante étant maintenant définie, il est possible de comprendre les notions de martensite autoaccomodante et orientée. La différence entre ces deux martensites réside dans le nombre de variantes. La martensite autoaccomodante est composée des 24 variantes qui se développent aléatoirement dans toutes les directions. Elle ne produit aucune déformation puisqu'il y a autant de grains qui se transforment vers la gauche que vers la droite. Il y a nécessairement des microdéformations sur chaque grain, mais la déformation macroscopique de l'échantillon est nulle. À l'inverse, la martensite orientée est composée de quelques variantes bien définies. Ces dernières sont inconditionnellement alignées avec la contrainte externe.

### 1.3.3 Phase rhomboédrique

Il arrive à l'occasion qu'une troisième phase participe à la transformation martensitique, soit la phase rhomboédrique, communément appelée la phase R. Cette dernière est une

phase intermédiaire qui facilite le passage de l'austénite à la martensite ou l'inverse. Elle peut être considérée comme une martensite intermédiaire. Tout comme la martensite, il existe une phase R autoaccommodante. De plus, dépendamment de l'alliage utilisé et du traitement thermique effectué, il est possible d'avoir une phase R seulement au chauffage ou seulement au refroidissement.

#### 1.3.4 Effet mémoire de forme

L'effet mémoire de forme est le comportement le plus étonnant des AMF. D'ailleurs, c'est la raison pour laquelle on appelle ces alliages à mémoire de forme. Cet effet peut être représenté par une déformation importante qui ressemble à une plastification du matériau, c'est-à-dire que l'échantillon, après un chargement et un déchargement, ne retrouve pas sa forme initiale. Par contre, si le spécimen est par la suite chauffé, il y aura alors un retour de forme. Ce phénomène s'explique de la façon suivante. L'échantillon est d'abord composé entièrement d'austénite, comme le montre l'étape 1 de la figure 8. Lors du refroidissement sans contrainte, toute l'austénite se transforme en martensite, mais de façon aléatoire (étape 2). Il y a donc une répartition uniforme dans tous les sens des variantes de martensite. On dit alors que la martensite est autoaccommodante. Il est à noter qu'à cette étape, il n'y a aucune déformation, le matériau a seulement changé de phase. Par la suite, si une force est appliquée, il y aura d'abord une déformation élastique  $\epsilon_1$  (étape 3) suivie d'une réorientation de la martensite (étape 4). La force appliquée permet d'aligner toutes les variantes de martensite dans la même direction. On obtient de cette façon une grande déformation  $\epsilon_2$ . C'est cette étape qui imite la plasticité puisque la martensite a changé de configuration. Elle porte donc maintenant le nom de martensite orientée. Lors du relâchement de la force, il y aura bien sûr un retour élastique ( $\epsilon_2 - \epsilon_3$ ), mais la martensite restera orientée (étape 5). Finalement, lors d'un chauffage, la martensite se transformera en austénite et l'AMF retrouvera alors sa forme initiale. Puisque l'étape 6 possède la même configuration que l'étape 1, il est possible d'effectuer ce cycle à plusieurs reprises. Si l'échantillon avait été fixé avant le



chauffage, le retour aux conditions initiales n'aurait pu se produire. Il y aurait alors eu une génération de contraintes dans l'échantillon. C'est d'ailleurs ces conditions qui permettent de créer des actionneurs en AMF performants.

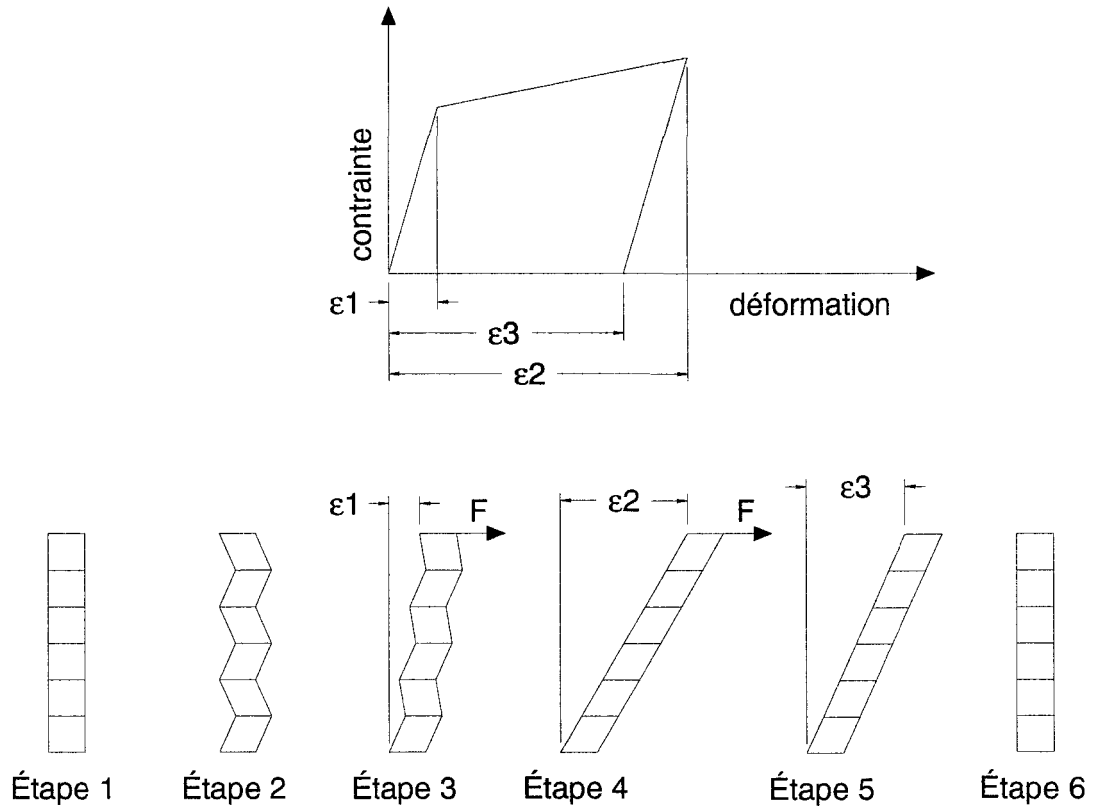


Figure 8 Effet mémoire de forme étape par étape

Il existe différents types de courbe qui permettent d'obtenir l'effet mémoire de forme. Le premier type correspond au chargement d'un AMF constitué entièrement de martensite, c'est-à-dire lorsque  $T < M_f$ . Il y a d'abord une déformation élastique proportionnelle au module de Young de la martensite  $E_M$ , suivie de la réorientation de la martensite (figure 9).

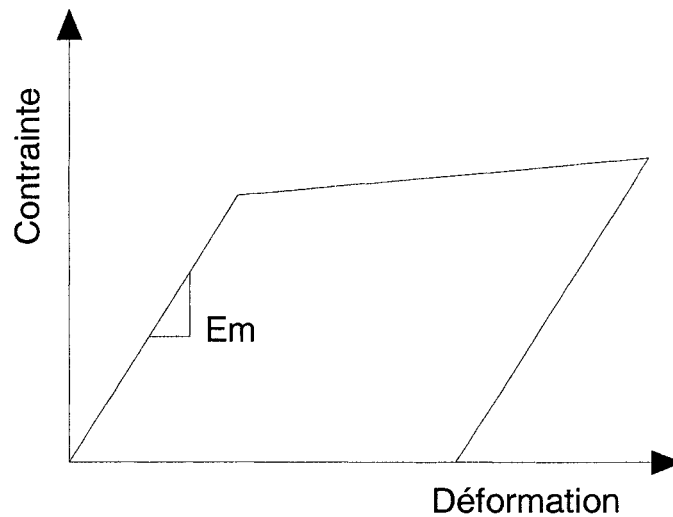


Figure 9 Mémoire de forme pour  $T < M_f$

Un autre type (figure 10) survient lorsque l'échantillon contient 100 % d'austénite et qu'il est refroidi entre  $M_s < T < A_s$ . Lors du chargement, l'échantillon a une déformation élastique selon les caractéristiques mécaniques de l'austénite ( $E_A$ ). Par la suite, l'augmentation de la contrainte permet de traverser les droites de transformation de la martensite et donc d'effectuer un changement de phase qui génère de la martensite orientée (figure 11). Lors du déchargement, le passage au travers de ces droites n'effectue aucun retour d'austénite puisque l'échantillon possède une température plus basse que la température  $A_s$ . L'échantillon reste donc en martensite et on obtient une déformation résiduelle.

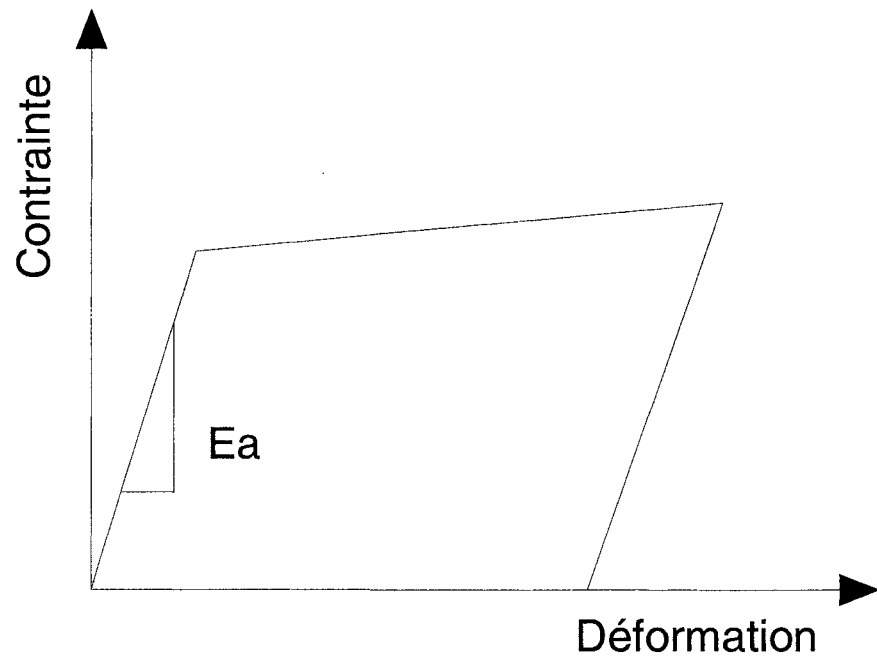


Figure 10 Mémoire de forme pour un échantillon 100% austénitique

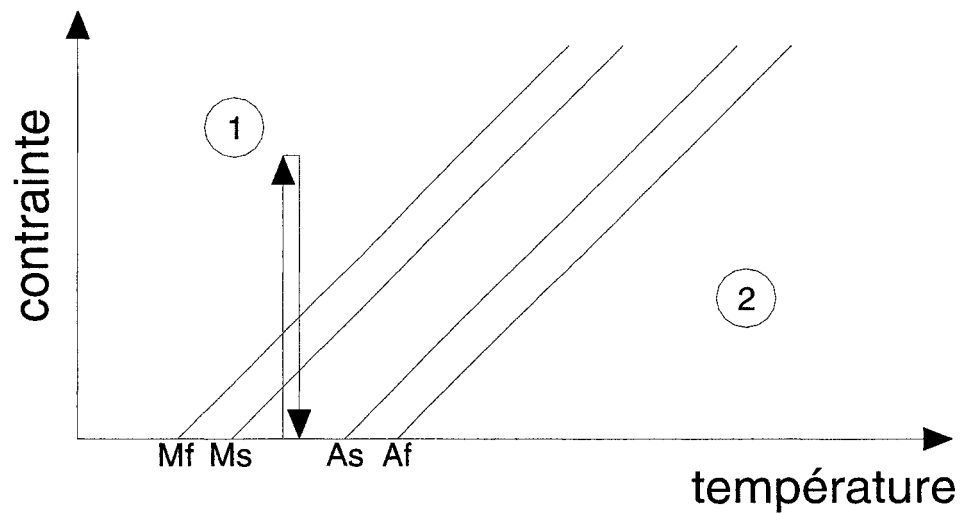


Figure 11 Diagramme d'état pour une reprise de forme qui débute avec  $M_s < T < A_s$

Le dernier type de courbe contrainte-déformation est une combinaison des deux types précédents, c'est-à-dire que l'échantillon est amené entre  $M_f < T < A_s$ , mais qu'il est composé d'une certaine fraction de martensite à cause des étapes de chargement précédentes. Il y a donc une déformation élastique de départ ayant les propriétés mécaniques comprises entre celle de la martensite et celle de l'austénite. Comme dans les autres cas, lorsque la contrainte est suffisamment élevée, il y a orientation de martensite, ce qui permet de créer l'effet mémoire de forme. Finalement, la figure 12 présente un exemple typique d'effet mémoire avec reprise de forme. On débute en austénite avec une contrainte nulle et un refroidissement de l'AMF pour permettre de la transformation en martensite autoaccomodante. Ensuite, on applique une contrainte et on obtient une déformation élastique suivie d'une réorientation de la martensite. Lors du relâchement de la charge, une déformation résiduelle est obtenue. On obtient ainsi l'effet mémoire de forme. Finalement, en augmentant la température, la déformation résiduelle diminue progressivement pour atteindre zéro. Il y a alors passage de la martensite orientée vers l'austénite.

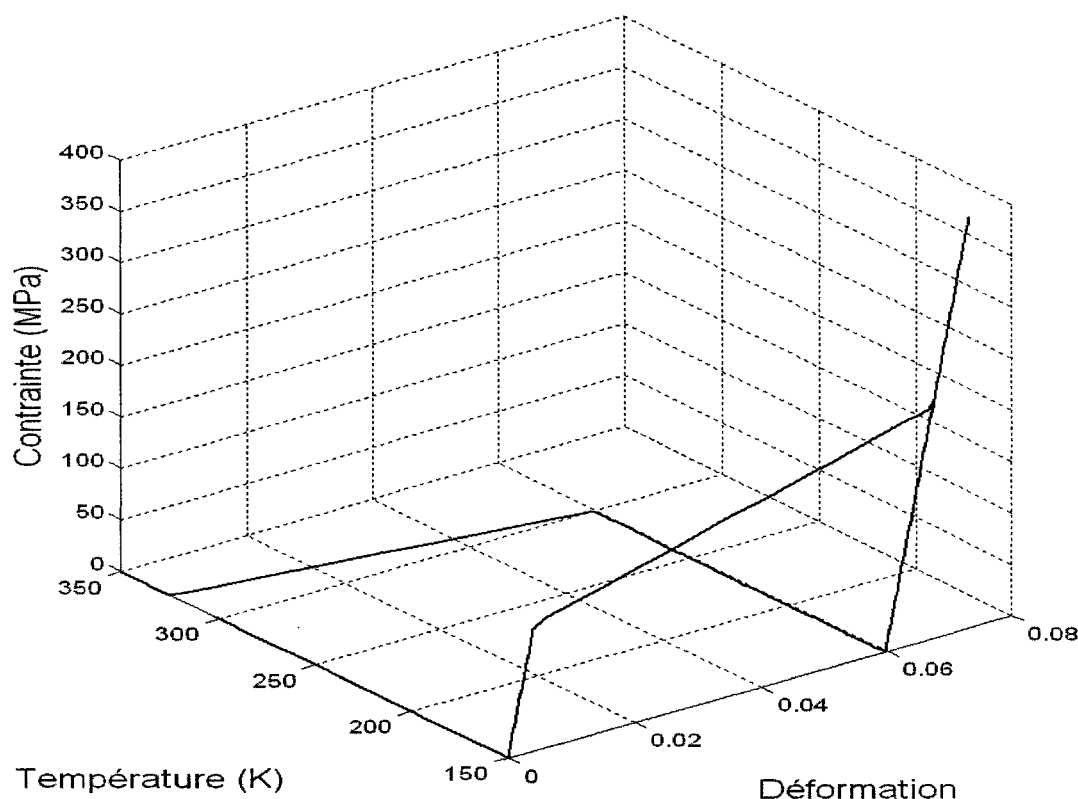


Figure 12 Exemple typique d'effet mémoire de forme

### 1.3.5 Effet mémoire double sens

L'effet mémoire double sens permet deux configurations différentes, une à haute température et une à basse température. Pour obtenir cet effet, l'AMF doit absolument être éduqué. Il existe plusieurs façons de le faire qui ont toutes le même objectif, c'est-à-dire d'introduire un réseau de dislocations dans le matériau. Ce réseau permet de favoriser de façon préférentielle la formation de certaines variantes de martensite lors du refroidissement sans contrainte. Il n'y a par conséquent plus de variante autoaccomodante et une déformation résiduelle apparaît alors. Pour la configuration à haute température, elle reprend toujours sa configuration initiale, comme à l'habitude. Par contre, il n'est pas possible d'obtenir la configuration à basse température sous contrainte. En effet, l'application de la contrainte domine l'effet du réseau de dislocation

et, par conséquent, la martensite se transforme donc dans le sens de la contrainte. La martensite ainsi générée est de la martensite orientée. Il n'est donc pas possible de générer un travail au refroidissement.

### 1.3.6 Effet superélastique

Pour obtenir un effet superélastique avec un AMF, il suffit de maintenir ce dernier à une température supérieure à  $A_f$ . L'échantillon est donc au départ 100 % austénitique. Lorsque la contrainte augmente, les températures de transformation augmentent et il y a transformation d'austénite en martensite. Lors de l'abaissement de la contrainte, l'effet contraire se produit et l'échantillon retourne aux mêmes conditions initiales. Puisque les températures de début de transformation directe et inverse sont différentes, il y a nécessairement apparition d'une hystérésis comme le démontre bien la figure 13.

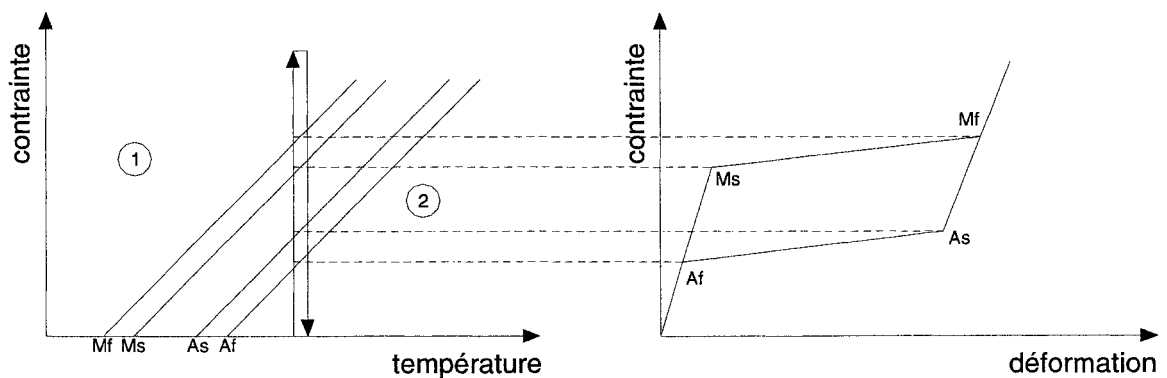


Figure 13 Effet superélastique d'un alliage à mémoire de forme

Il est donc possible de séparer la courbe de contrainte – déformation en deux. La première partie est composée du chargement. Elle contient d'abord une déformation élastique de zéro à  $\sigma_{ms}$  qui répond à la loi de Hooke avec le module de Young de l'austénite. Par la suite, il y a transformation d'austénite en martensite orientée de  $\sigma_{Ms}$  à  $\sigma_{Mf}$ . Lorsque la transformation est complète à 100 %, il y a alors une troisième section qui est, encore une fois, une déformation élastique. Par contre, le module de Young est

maintenant celui de la martensite. Pour le déchargement, les étapes sont les mêmes. L'ordre est simplement inversé et les contraintes critiques utilisées sont celles de l'austénite, c'est-à-dire  $\sigma_{As}$  à  $\sigma_{Af}$ .

### 1.3.7 Effet amortissant

La capacité d'amortissement des AMF est très bonne. En effet, pour un matériau soumis à une température inférieure à  $M_s$ , la réorientation des variantes de martensite permet de dissiper l'énergie. Ce phénomène est également appelé ferroélasticité. En effet, lorsque la contrainte passe successivement de la tension à la compression, on obtient une courbe qui est semblable à celle d'un matériau ferromagnétique plongé dans un champ magnétique [20].

## 1.4 Exemple d'application

Cette section contient quelques domaines d'applications ainsi que quelques exemples bien connus dans le milieu des alliages à mémoire de forme. Il est à noter qu'elle ne constitue pas une revue exhaustive de toutes les applications.

### 1.4.1 Secteur aérospatial

L'industrie aérospatiale doit minimiser le volume et le poids de toutes leurs composantes afin de minimiser les coûts de lancement. Puisque les AMF offrent un rapport force / densité excellent, ils sont des outils par excellence. L'axe des Y de la figure 14 le démontre d'ailleurs très bien. De plus, l'axe diagonale montre aussi que les AMF offrent un excellent ratio énergie / poids.

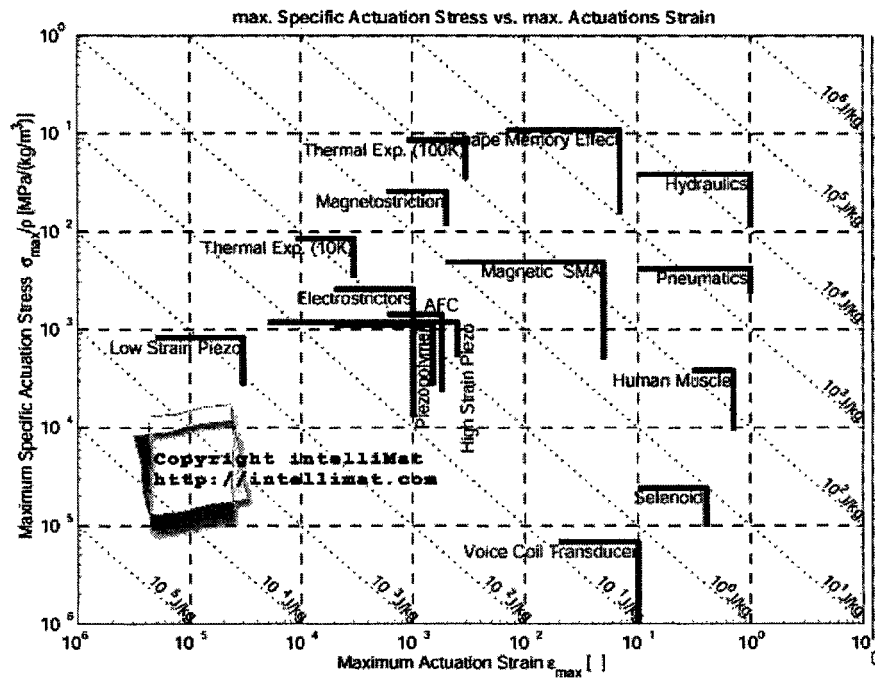


Figure 14 Comparaison de différents matériaux [21]

Le premier exemple est le télescope Hubble. Ce télescope, lancé en avril 1990, possédait des actionneurs en AMF (reprise de forme) pour le déploiement des panneaux solaires nécessaires à l'alimentation électrique des composantes électroniques.



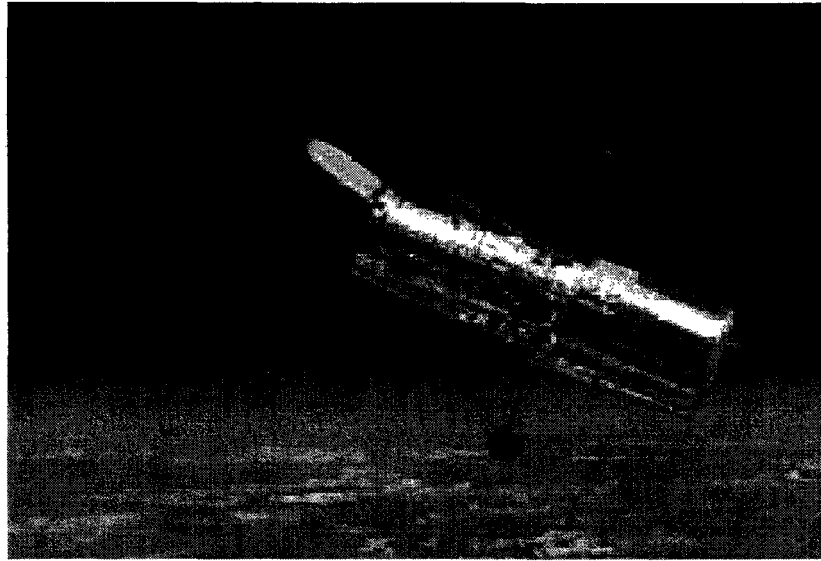


Figure 15 Télescope Hubble lancé en avril 1990 [22]

Le deuxième exemple est le satellite Clémentine. Lancé le 25 janvier 1994, ce satellite a déployé ses panneaux solaires en utilisant des boulons *frangibolt* développés par la compagnie TiNi Alloy Aerospace Inc. de San Leandro, Californie (voir figure 16 et figure 17). Ces boulons permettent d'éliminer les charges explosives utilisées auparavant qui nécessitaient des précautions spéciales pour le transport et l'entreposage. De plus, ces charges libéraient un gaz lors de l'explosion, ce qui peut faire dévier le satellite de sa trajectoire initiale.

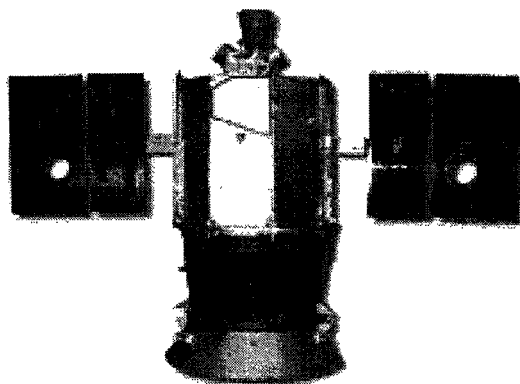


Figure 16 Satellite Clémentine lancé le 25 janvier 1994 [23]

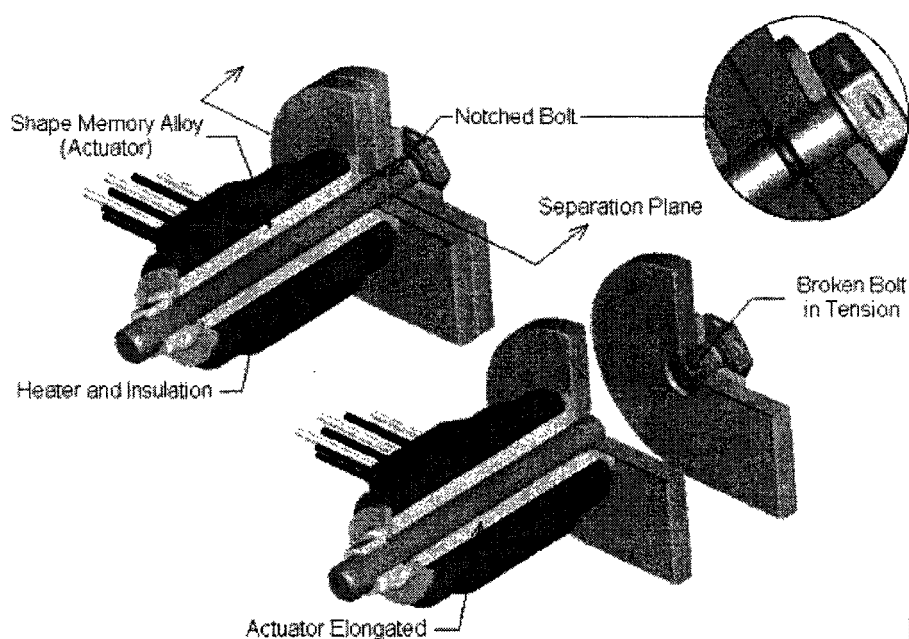


Figure 17 Frangibolt de la compagnie TiNi Alloy Aerospace Inc de San Leandro [24]

Finalement, le dernier exemple est la célèbre station spatiale MIR. Après la chute de l'URSS, cette dernière est devenue la première station internationale. Dans un environnement hostile comme l'espace et avec l'absence de gravité, il est difficile d'assembler les modules de façon traditionnelle, comme par exemple le boulonnage, le

rivetage, la soudure. En effet, le simple fait d'appliquer une force sur une clé afin de serrer un boulon repousse l'astronaute en direction opposée. L'idée développée pour contrer ce problème utilise les AMF. Ce procédé ressemble à un sertissage effectué avec un tube d'AMF. On déforme préalablement à froid le tube, on y insère à l'intérieur l'assemblage et on chauffe par infrarouge le tube. Il se contracte et sertit alors l'assemblage (voir figure 19). Cette technique ressemble énormément à la première application des AMF, c'est-à-dire à celle du manchon de raccordement pour les conduites hydrauliques du chasseur américain, le F-14.

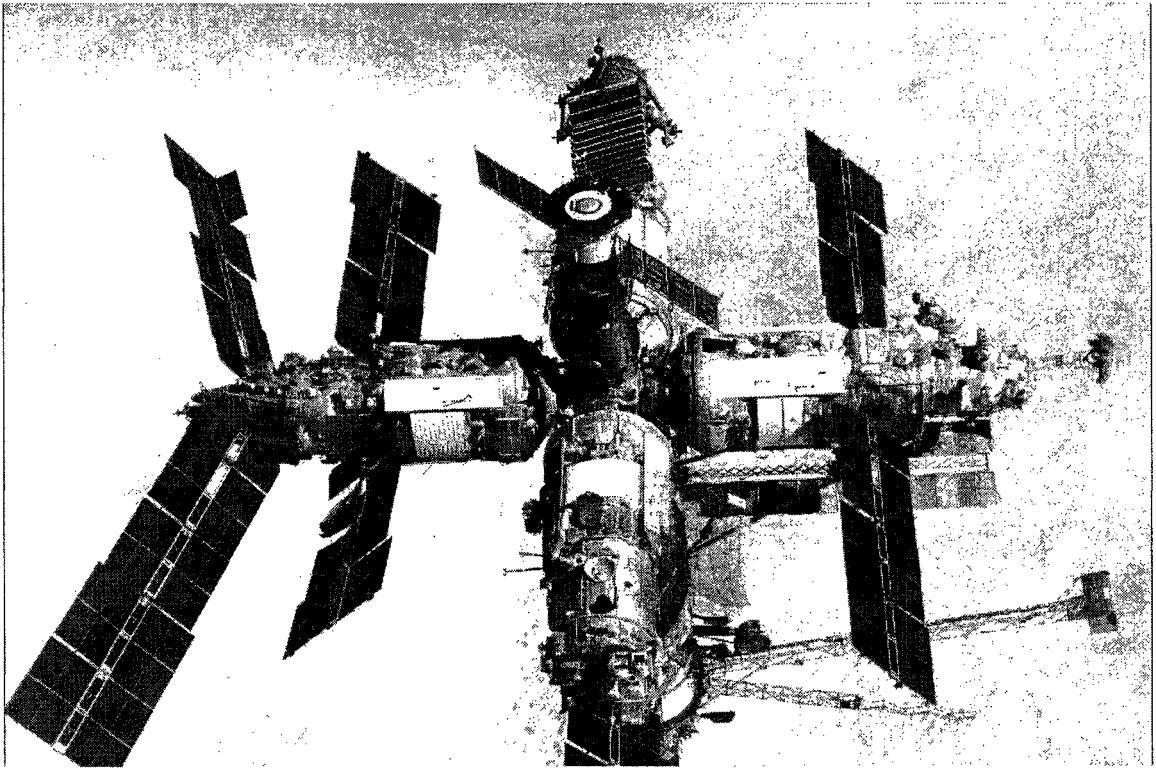


Figure 18 Station orbitale MIR [25]

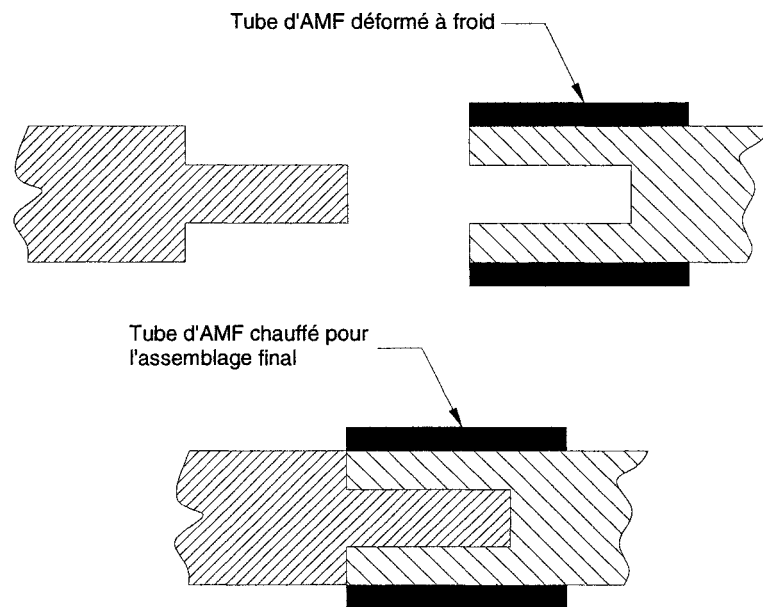


Figure 19 Couplage thermomécanique

#### 1.4.2 Secteur industriel

Ce secteur, tout comme l'industrie aéronautique, utilise également la reprise de forme des AMF afin de créer des actionneurs les plus compacts possible. Par contre, on utilise aussi les AMF pour leur effet amortissant et leur effet superélastique. En robotique, l'utilisation de microactionneurs est courante. Par exemple, la figure 20 montre une main artificielle utilisant les AMF.

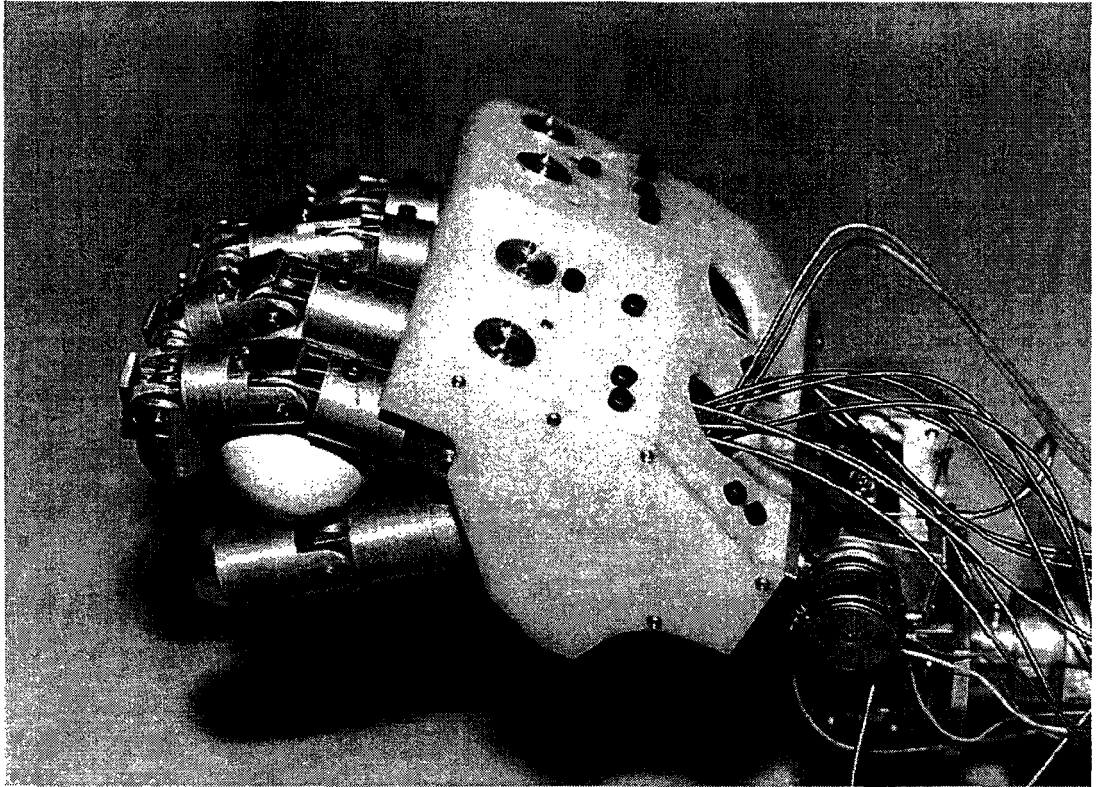


Figure 20 Micro actuateur pour la robotique

L'optométrie, avec ses lunettes à monture superélastique, est probablement l'exemple le plus connu. En effet, la superélasticité permet de grandes déformations et les lunettes deviennent alors pratiquement incassables.

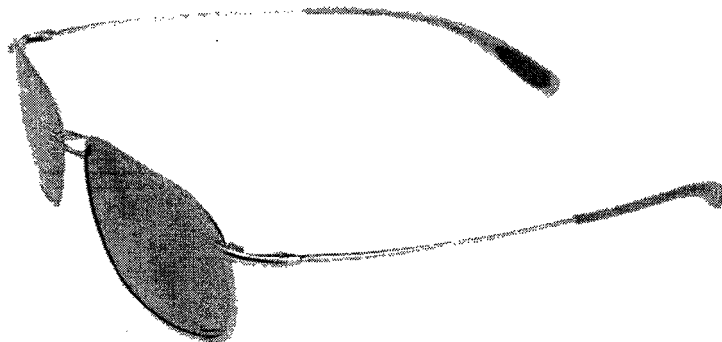


Figure 21 Lunette avec monture superélastique [26]

### 1.4.3 Secteur biomédical

Ce secteur d'activité a des exigences très élevées par rapport aux matériaux utilisés. D'ailleurs, ce secteur est probablement le plus actif de nos jours et il utilise particulièrement l'effet superélastique avec les alliages de nitinol qui sont évidemment biocompatibles [9]. Par exemple, les stents sont des dispositifs qui permettent une chirurgie minimalement invasive afin de contrer les problèmes cardiaques reliés à l'obstruction partielle des artères. En effet, ce dispositif, une fois contracté, s'insère dans l'artère (voir figure 22). Par la suite, lors du relâchement, l'effet superélastique contraint l'artère à retrouver le diamètre original et permet ainsi le passage du sang (voir figure 23).

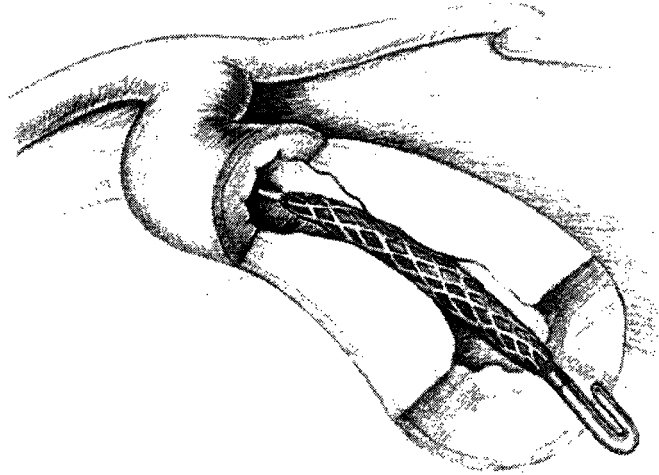


Figure 22 Stent cardiovasculaire comprimé [27]

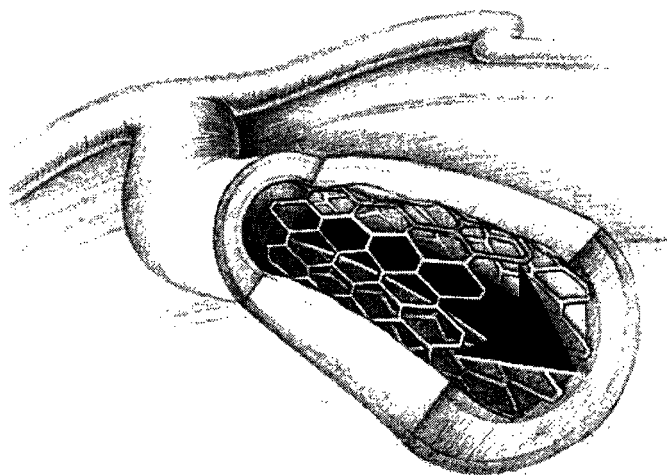


Figure 23 Stent cardiovasculaire relâché [27]

Tout comme le stent, la valve cardiaque de la figure 24 permet une chirurgie minimalement invasive, ce qui réduit les répercussions négatives sur le patient. Pour plus d'information sur son fonctionnement, il est possible de consulter le brevet US6458153 [28].

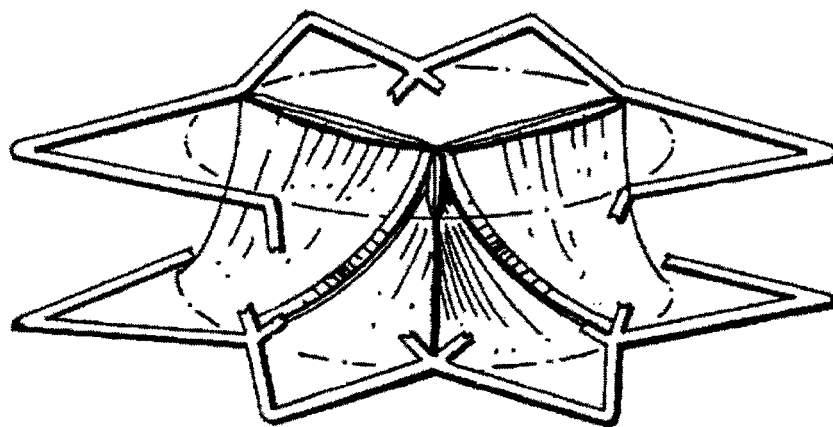


Figure 24 Valve cardiaque [28]

Finalement, le dernier exemple du secteur biomédical est les broches d'orthodontie. En effet, puisque les AMF ont un plateau sur l'hystérésis, la charge appliquée sur les dents reste constante pour une certaine plage de déformation. Cela permet au patient d'aller moins régulièrement chez son dentiste pour l'ajustement de son appareil dentaire.

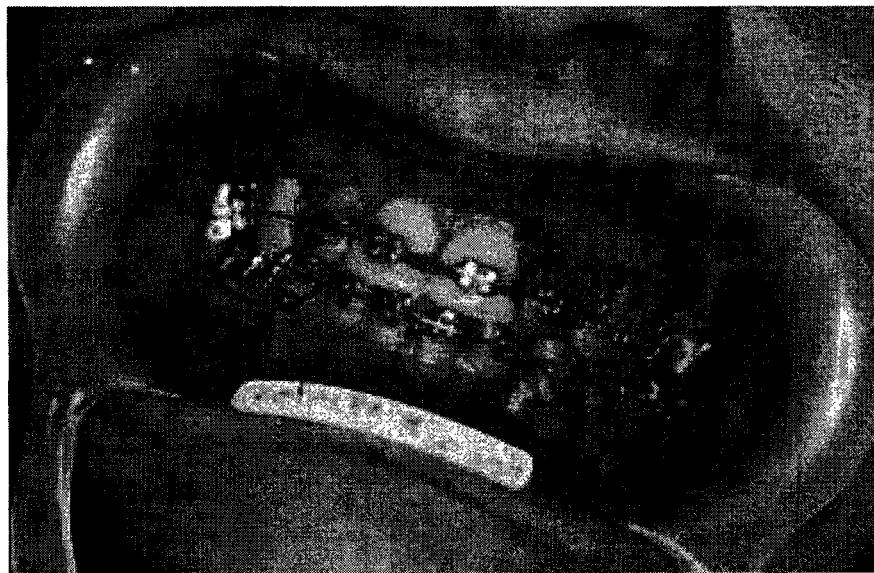


Figure 25 Broche d'orthodontie [29]



## **CHAPITRE 2**

### **LES MODÈLES NUMÉRIQUES D'AMF**

Ce chapitre contient une description du modèle développé dans ce projet. Les équations du modèle mécanique et du modèle de transfert de chaleur sont détaillées de façon à ce que le lecteur puisse reproduire aisément le modèle dans son ensemble. Cependant, une revue bibliographique est d'abord effectuée afin de bien situer le nouveau modèle par rapport à ceux existants.

#### **2.1 Les modèles existants**

Il existe essentiellement trois familles de modèles numériques d'AMF. Chacune de ces familles possède ses avantages et ses inconvénients propres à une application particulière. La section qui suit décrit brièvement ces trois familles.

##### **2.1.1 Les modèles thermodynamiques ou macroscopiques**

Cette approche a été utilisée par certains auteurs tels que Ivshin et Pence [30], Boyd et Lagoudas [31], Benzaoui, Lexcellant et al. [32], ainsi que par plusieurs autres. Généralement, les équations utilisées emploient les lois de la thermodynamique, c'est-à-dire qu'ils utilisent des notions abstraites comme l'enthalpie, l'entropie et l'énergie de Gibbs qui sont plutôt difficiles à mesurer. Par exemple, l'entropie peut être vue comme la mesure du désordre moléculaire [33], mais avec quel instrument peut-on mesurer ce désordre?

Cependant, une fois que les paramètres sont assimilés et calculés, il suffit d'évaluer l'énergie libre de l'austénite et de la martensite. L'état ayant la plus faible énergie est favorisé. En effet, tout corps cherche à minimiser son énergie interne peu importe sa nature thermique, mécanique, chimique, électrique ou gravitationnel.

Par exemple, la figure 26 représente l'énergie de Gibbs ( $G$ ) en fonction de la température ( $T$ ) et de la pression ( $P$ ) pour l'austénite et la martensite. Suivant le raisonnement précédent et en assimilant la pression à une contrainte, on remarque dans le diagramme  $P$  versus  $T$  (figure 26-3) que la martensite est la phase stable à basse température tandis que l'austénite est la phase stable à haute température. De plus, la droite qui sépare les deux états ressemble aux quatre droites du diagramme de phase de la figure 3. En effet, la droite du graphique représente la température  $T_0$ , cette température critique n'est ni plus ni moins que la moyenne de  $M_f$ ,  $M_s$ ,  $A_s$  et  $A_f$ . Finalement, cette approche utilise uniquement une proportion de martensite macroscopique comme à la figure 27, ce qui signifie qu'on approxime un polycristal par un monocristal. Il n'est donc pas possible de simuler des textures.

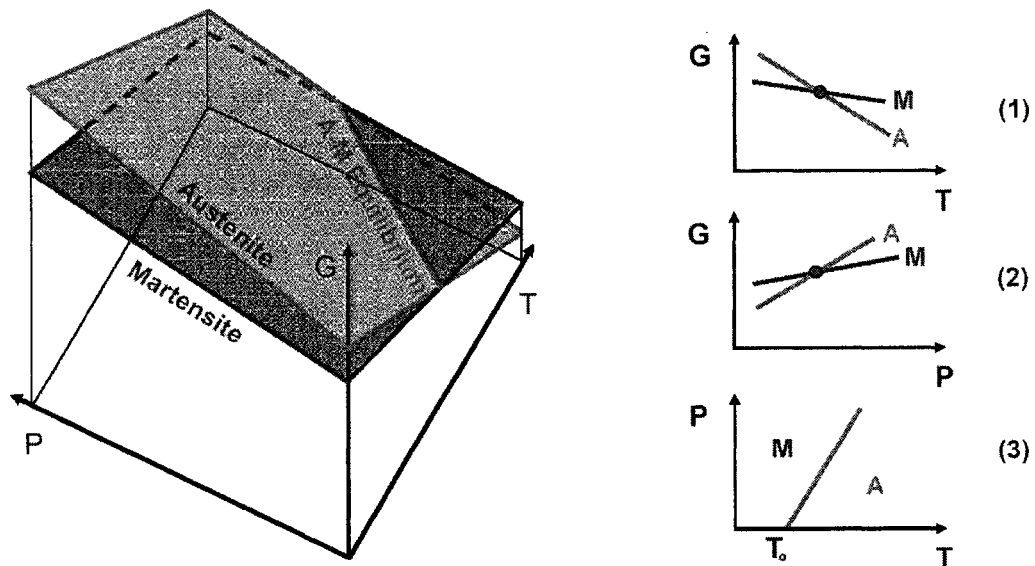


Figure 26 Équilibre thermodynamique des AMF [34]

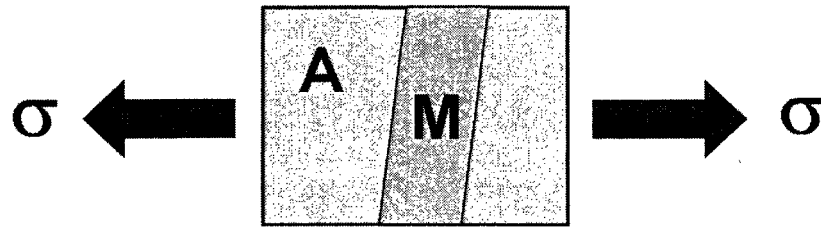


Figure 27 Proportion de martensite macroscopique

### 2.1.2 Les modèles micromécaniques

Plusieurs auteurs, comme Lichatchev [17; 35; 36] et Patoor et al. [37-40], ont développé des modèles micromécaniques. Cette technique de modélisation est différente de la dernière présentée. En effet, cette approche calcule les déformations à l'échelle atomique et, par la suite, en effectuant une moyenne, il est possible de trouver la déformation macroscopique de l'échantillon. Cela implique le calcul d'une microdéformation et d'une proportion de martensite pour chaque grain du matériau. La figure 28 montre la proportion de martensite pour trois grains. Malheureusement, le nombre de grains est normalement très élevé et rend les calculs très lourds. Un nombre insuffisant de grains ne représente pas bien la réalité, bien entendu, pour un matériau polycristallin. En effet, un matériau monocristallin n'a qu'un seul grain et, par conséquent, il n'est pas nécessaire d'utiliser un nombre élevé de grains, un seul suffit. Finalement, cette approche permet de modéliser facilement des textures (pour les matériaux polycristallins) en modifiant simplement l'orientation des grains. Il est aussi possible, à l'aide de cette famille de modèle, de créer les variantes de martensite. Cette approche, combinée à la texture, permet d'obtenir des modèles 3D très réalistes. Cependant, tout comme les modèles thermodynamiques, le calcul de la proportion de martensite s'effectue en calculant l'énergie libre de chaque grain, ce qui rend les calculs plus longs puisque le nombre de grains est normalement très élevé.

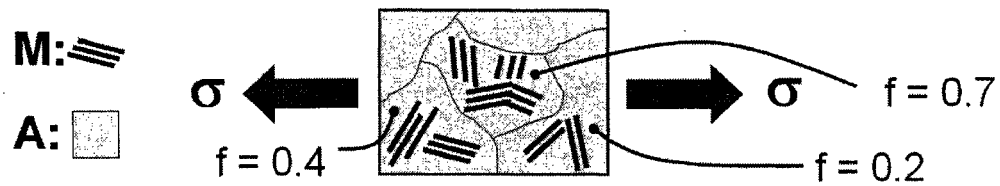


Figure 28 Proportion de martensite microscopique

### 2.1.3 Les modèles phénoménologiques

La dernière famille de modèle est probablement la plus utilisée de par sa simplicité de compréhension. Par contre, elle est la moins captivante pour les puristes puisqu'elle reproduit des phénomènes physiques préalablement définis plutôt que de les expliquer. En effet, on bâtit le modèle à partir de résultats plutôt qu'à partir de phénomènes. Cette famille de modèle peut être divisée en deux sous catégories : les modèles basés sur l'interpolation et ceux fondés sur la loi constitutive de Tanaka.

#### 2.1.3.1 Interpolation

Un des premiers modèles d'AMF est le modèle bilinéaire, c'est-à-dire qu'il est composé essentiellement de droites. Les fondateurs de ce modèle sont Müller et Xu [41] qui ont modélisé une courbe superélastique comme à la figure 29. Les sous-cycles sont aussi modélisés avec des droites et les points d'inflexion passent par une droite nommée droite d'équilibre. La faiblesse de ce modèle est sans aucun doute la droite de transformation qui a une pente nulle. Cela signifie que  $\sigma_{ms} = \sigma_{mf}$ , ce qui est, à la base, difficilement concevable pour la majorité des AMF. Ce modèle considère donc le changement de phase comme étant instantané.

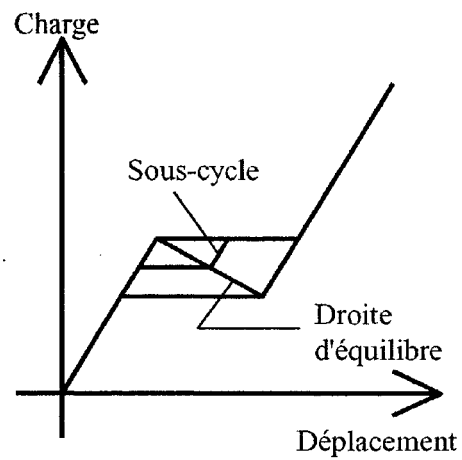


Figure 29 Modèle bilinéaire selon Müller et Xu

Par la suite, Brandon et Rogers [42] ont ajouté une pente à la droite de transformation. Ils obtiennent à ce moment un modèle qui ressemble à la figure 30.

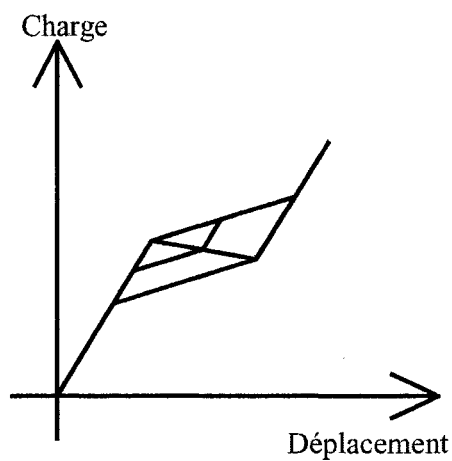


Figure 30 Modèle bilinéaire selon Brandon et Rogers

D'autres auteurs ont aussi travaillé à améliorer le modèle. C'est le cas de Gillet et al. [43] qui ont modifié le modèle en gérant différemment les sous-cycles. En effet, la droite d'équilibre est toujours présente, mais lorsque le chargement traverse cette droite, une

penne est automatiquement calculée, et ce, à chaque fois, comme le montre la figure 31. Cette façon de faire correspond mieux au comportement du nitinol pour les sous-cycles de chargement et de déchargement. Finalement, Viens [44] a publié de récents travaux qui ont permis d'intégrer ce modèle au logiciel d'éléments finis commercial, ANSYS.

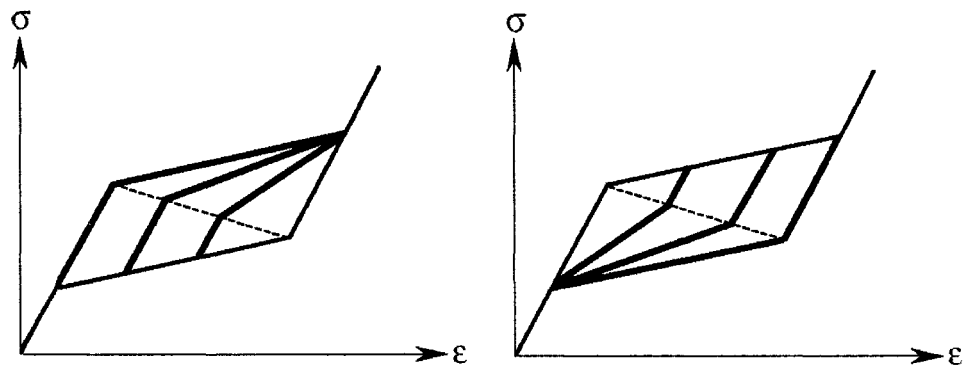


Figure 31 Modèle bilinéaire selon Gillet, Patoor et Berveiller

Les modèles décrits précédemment ne représentent que les alliages à mémoire de forme dans leur domaine superélastique. Afin de remédier à ce problème, un autre modèle a été créé par Terriault [45]. Il s'agit de définir une surface représentant le comportement d'un AMF dans le domaine de la déformation, de la température et de la contrainte. Pour ce faire, quelques courbes expérimentales sont utilisées (figure 32 - gauche) et, à l'aide de la méthode d'interpolation du krigeage, il est possible de générer une surface complexe, comme au centre de la figure 32. Il suffit par la suite d'interpréter sur la surface l'information désirée. En effet, si on connaît deux des trois paramètres de chargement, il est facile de trouver la courbe d'intersection sur la surface (figure 32 - droite).

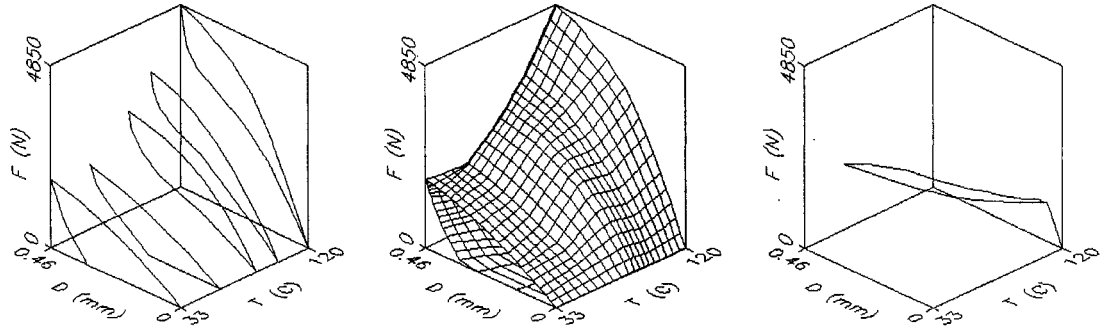


Figure 32 Modèle de krigeage de Terriault [17]

### 2.1.3.2 Tanaka

La dernière série de modèles est basée sur une équation constitutive développée par Tanaka [46-49]. Cette équation s'appuie sur la thermodynamique et a la forme dérivative suivante :

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \sigma}{\partial T} dT \quad (2.1)$$

où  $\sigma$  est la contrainte,  $\xi$  est la proportion de martensite dans le matériau,  $\varepsilon$  est la déformation et  $T$  est la température. À première vue, on peut dire que la contrainte dépend de la déformation, de la proportion de martensite ainsi que de la température. Le premier terme correspond à la déformation élastique. En effet, la variation de contrainte par rapport à une variation de déformation est tout simplement le module de Young et la loi de Hooke stipule que le module de Young multiplié par la déformation est égal à la contrainte. Toutefois, il est important de noter que le module de Young est différent pour la martensite et l'austénite. Le second terme est la contrainte de transformation qui dépend de la proportion de martensite. Finalement, le dernier terme correspond à la variation de contrainte générée par la température pour un AMF. On peut comparer ce terme à la dilatation.

L'équation peut aussi s'écrire de la façon suivante sous forme incrémentielle par rapport à un état connu  $(\sigma_o, \varepsilon_o, T_o, \xi_o)$  où  $D$  est le module de Young,  $\Omega$  est le tenseur de transformation et  $\Theta$  est le taux de variation de la contrainte par rapport à la température.

$$\begin{aligned} \sigma - \sigma_o &= D(\varepsilon, \xi, T) * (\varepsilon - \varepsilon_o) + \dots \\ \dots \Omega(\varepsilon, \xi, T) * (\xi - \xi_o) &+ \Theta(\varepsilon, \xi, T) * (T - T_o) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Le module de Young dépend de trois facteurs. Cependant, des études expérimentales démontrent qu'il est étroitement lié à la proportion de martensite. Liang [50] propose donc l'équation suivante :

$$D(\varepsilon, \xi, T) = D_a + \xi(D_m - D_a) \quad (2.3)$$

où  $D_a$  est le module d'élasticité de l'austénite tandis que  $D_m$  est celui de la martensite. Il est aussi possible d'exprimer  $\Omega$  de la façon suivante :

$$\Omega(\varepsilon, \xi, T) = -\varepsilon_L D(\xi) \quad (2.4)$$

où  $\varepsilon_L$  est la valeur de déformation résiduelle maximum. Finalement, la valeur de  $\Theta$  peut être considérée comme une constante puisque la variation de ce terme est très faible en fonction des variables impliquées. Par exemple, Brinson [51] utilise une valeur de 0.55 MPa/°C. Cette auteure a d'ailleurs modifié légèrement l'équation de Tanka. Toutefois, l'essence reste la même. L'équation de Tanaka semble donc à première vue très simple. Par contre, le calcul de la proportion de martensite est compliqué. En effet, les modèles utilisant l'équation de Tanka se distinguent par le calcul de cette proportion. Tanaka [46-49] utilise une équation qui approxime la proportion de martensite à l'aide d'une équation exponentielle. Liang et Rogers [52] proposent une équation basée sur un



cosinus tandis que Brinson [51; 53-55] conserve la forme basée sur le cosinus, mais sépare la proportion de martensite en deux proportions de martensite distinctes. La première dépend de la contrainte, c'est donc la proportion de martensite orientée. La deuxième, pour sa part, ne dépend que de la température, c'est donc la proportion de martensite autoaccomodante. Bien entendu, la somme des deux proportions de martensite doit toujours être comprise entre zéro et un. Finalement, Huang [56] propose un ajustement de courbe sur le ratio de la déformation de transformation par rapport à la déformation de transformation maximum pour trouver la proportion de martensite.

## 2.2 Modèle hybride macro-micro mécanique

Les modèles phénoménologiques sont populaires, fonctionnent relativement bien et ils sont très simples à utiliser. Par contre, ils ne reproduisent pas les textures et il n'y a pas eu, depuis quelques années déjà, d'amélioration de ce type de modèle. Le sujet semble être saturé pour cette approche. Les modèles micromécaniques représentent bien les AMF et sont basés sur une approche beaucoup plus puriste, c'est-à-dire qu'ils représentent le plus fidèlement possible la mécanique de transformation de l'alliage. Par contre, la mise sur pied d'un modèle de ce genre peut être longue puisque la caractérisation de l'alliage n'est pas simple comparativement à celle utilisée par les modèles phénoménologiques où l'utilisation d'une simple machine de traction est nécessaire. Le modèle développé ici comporte donc le meilleur des deux mondes, c'est-à-dire qu'il est basé sur les lois physiques de la micromécanique, mais que le calcul de la proportion de martensite est basé sur des expérimentations comme pour les modèles phénoménologiques. Le modèle est donc rapide à mettre en place puisque la caractérisation est simple. De plus, il permet la modélisation de texture et il utilise une approche plus fondamentale. Les paragraphes qui suivent expliquent le modèle hybride inspiré des modèles de Likhatchev [17; 35; 36] (modèle micromécanique) et de Brinson [51; 53-55] (modèle phénoménologique).

### 2.2.1 Matrice de distorsion

La première notion essentielle à la compréhension du modèle est la matrice de distorsion. Cette matrice est aussi appelée la matrice des déformations de Bain en l'honneur de E.C. Bain qui, en 1924, a proposé un mécanisme pour le changement de phase des aciers [35]. Cette notion de déformation est essentielle puisque les modèles micromécaniques utilisent les microdéformations de chaque grain pour calculer les macrodéformations. Il est donc nécessaire de trouver la matrice de déformation de transformation d'un grain pour un alliage donné. Knowles et Smith [57] ont étudié le changement de phase du nitinol dans les années 80 et, à l'aide de cette étude microstructurale, il est possible de définir la matrice de distorsion  $D$  qui caractérise les déformations créées lors du passage de l'austénite à la martensite. La figure 33 et la figure 34 présentent deux exemples de matrice de distorsion qui ne représente pas le changement de phase dans les AMF. Le premier ne considère qu'un allongement de 20 % en  $X$  tandis que le second représente un cisaillement pur de 10 % en  $XY$ . Dans le cas de la transformation de l'austénite en martensite, une combinaison des deux exemples est nécessaire. Les lignes qui suivent expliquent comment trouver la matrice de distorsion  $D$ .

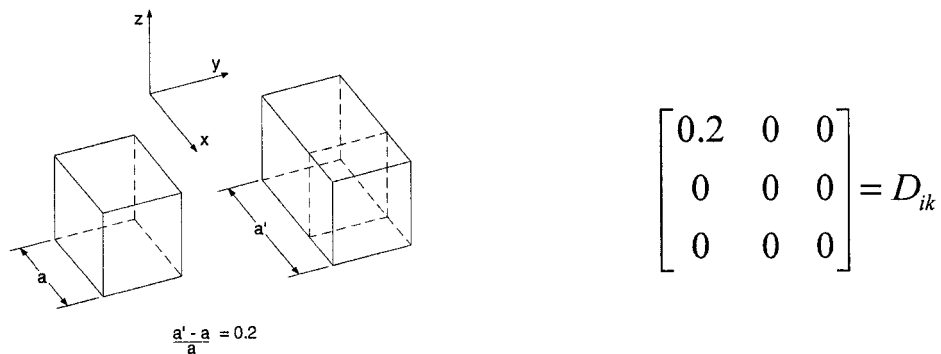


Figure 33 Exemple de déformation pour une matrice  $D$  (élongation)

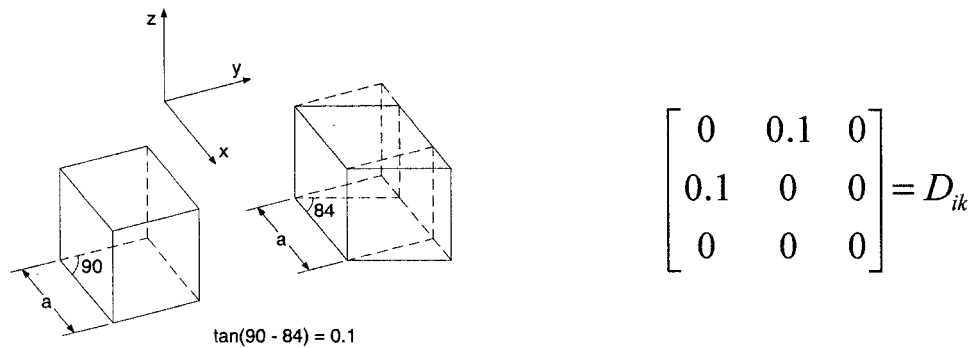


Figure 34 Exemple de déformation pour une matrice D (cisaillement)

On débute tout d'abord avec l'analyse de 4 mailles d'austénite comme représentée à la figure 35 où  $a_0$  est la longueur de la maille. On sait aussi que deux mailles élémentaires d'austénite sont nécessaires pour créer une maille de martensite, et que le cisaillement créé lors de la transformation en martensite ne s'effectue pas selon l'axe de la maille élémentaire d'austénite. Il est donc nécessaire de redéfinir un système d'axes différent  $i'$ ,  $j'$  et  $k'$  orienté selon les vecteurs  $[\bar{1}10]$ ,  $[110]$  et  $[001]$ . Ce changement se traduit par une rotation du référentiel de 45 degrés comme à la figure 36. Cela facilite la compréhension et les calculs numériques.

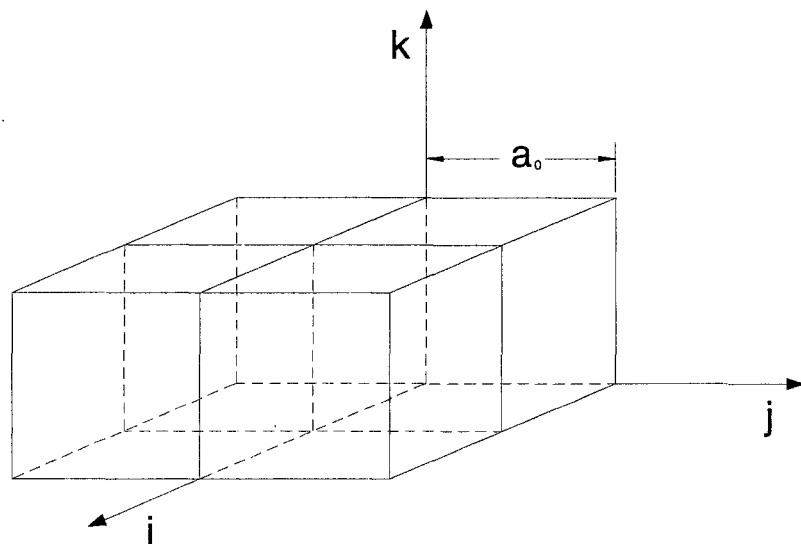


Figure 35 Mailles d'austénite

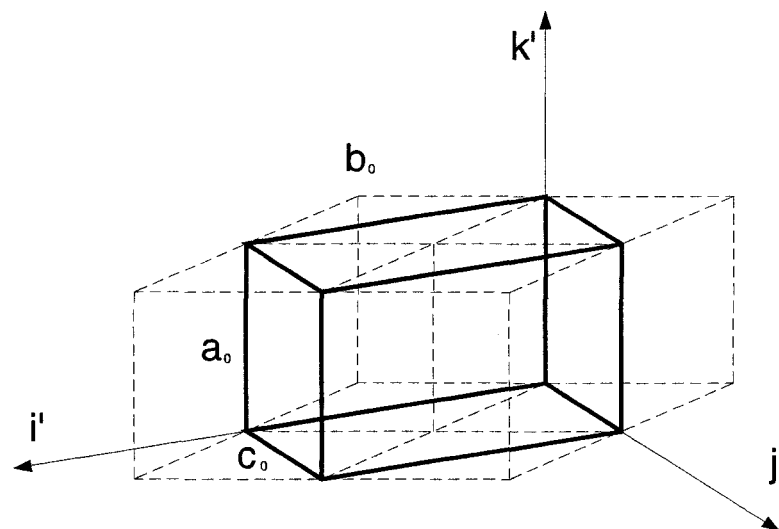


Figure 36 Changement de référentiel et création d'une nouvelle maille d'austénite

La création d'une maille d'austénite virtuelle est nécessaire, mais les calculs pour déterminer les nouveaux paramètres de maille sont très simples. En effet, à l'aide du théorème de Pythagore, on peut calculer les nouveaux paramètres de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a_0 \\
 b_0 &= \sqrt{a_0^2 + a_0^2} = \sqrt{2}a_0 \\
 c_0 &= \sqrt{a_0^2 + a_0^2} = \sqrt{2}a_0
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Finalement, la martensite possède une structure monoclinique, c'est-à-dire qu'elle possède trois longueurs de maille distinctes,  $a$ ,  $b$  et  $c$ , et un angle  $\beta$  qui caractérise le cisaillement de la maille [58]. La figure 37 représente une maille de martensite dans le référentiel  $i', j'$  et  $k'$ .

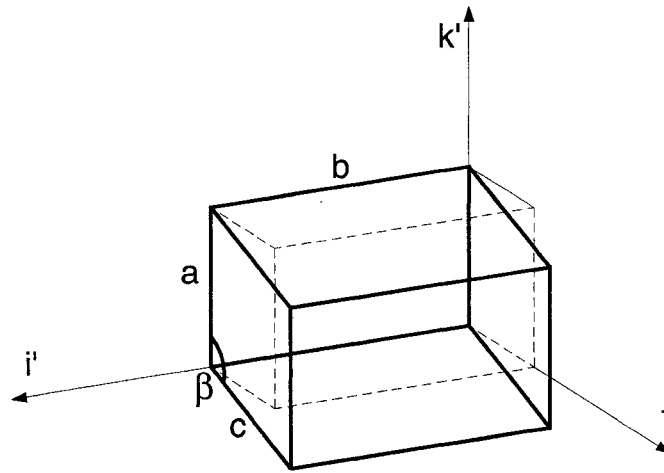


Figure 37 Maille de martensite dans le référentiel  $i', j'$  et  $k'$

Le passage de la maille d'austénite virtuelle vers la maille de martensite est décrit par la matrice de transformation suivante :

$$\begin{bmatrix}
 \frac{b}{\sqrt{2}a_0} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{c \sin(\beta)}{\sqrt{2}a_0} & 0 \\
 0 & \frac{c \cos(\beta)}{\sqrt{2}a_0} & \frac{a}{a_0}
 \end{bmatrix}
 \tag{2.6}$$

Cette matrice de transformation permet donc de trouver, pour un point initial  $(x,y,z)$  de la maille d'austénite virtuelle, les coordonnées correspondante à la maille de martensite dans un référentiel  $i', j'$  et  $k'$  :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{martensite}} = \begin{bmatrix} \frac{b}{\sqrt{2}a_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c \sin(\beta)}{\sqrt{2}a_0} & 0 \\ 0 & \frac{c \cos(\beta)}{\sqrt{2}a_0} & \frac{a}{a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_{\text{austénite}} \quad (2.7)$$

On peut aussi écrire les équations sous forme algébrique, ce qui rend la compréhension plus simple pour les explications à venir. On obtient alors les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \frac{b}{\sqrt{2}a_0} x_0 \\ y &= \frac{c \sin(\beta)}{\sqrt{2}a_0} y_0 \\ z &= \frac{c \cos(\beta)}{\sqrt{2}a_0} y_0 + \frac{a}{a_0} z_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Connaissant maintenant les coordonnées des points de la maille élémentaire pour un changement de phase complet, il est facile de calculer les déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  selon chaque axe. Les coordonnées finales étant les valeurs calculées précédemment, tandis que les coordonnées initiales sont celles de la maille d'austénite.

$$\begin{aligned}
u &= x - x_0 = \left( \frac{b_0}{\sqrt{2}a_0} x_0 \right) - x_0 = x_0 \left( \frac{b}{\sqrt{2}a_0} - 1 \right) \\
v &= y - y_0 = \left( \frac{c \sin(\beta)}{\sqrt{2}a_0} y_0 \right) - y_0 = y_0 \left( \frac{c \sin(\beta)}{\sqrt{2}a_0} - 1 \right) \\
w &= z - z_0 = \left( \frac{c \cos(\beta)}{\sqrt{2}a_0} y_0 + \frac{a}{a_0} z_0 \right) - z_0 \\
w &= y_0 \left( \frac{c \cos(\beta)}{\sqrt{2}a_0} \right) + z_0 \left( \frac{a}{a_0} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Les déplacements sont maintenant connus et ils permettent de calculer les déformations de transformation. En effet, en émettant l'hypothèse que la transformation martensitique est linéaire [59], il est possible d'utiliser le tenseur de déformation infinitésimal qui s'énonce comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{2.10}$$

On obtient alors les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial x_0} \right) = \frac{b}{\sqrt{2}a_0} - 1 \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} \right) = \frac{c \sin(\beta)}{\sqrt{2}a_0} - 1 \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial z_0} \right) = \frac{a}{a_0} - 1 \\
 \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) = 0 \\
 \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) = 0 \\
 \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) = \frac{c \cos(\beta)}{2\sqrt{2}a_0}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

En remplaçant les paramètres de mailles par des valeurs numériques, il sera ainsi possible de trouver la matrice de distorsion. L'auteur Zhao [60] présente les trois auteurs suivants qui ont trouvé des paramètres différents :

	Ostuka <i>et al</i>	Kudoh <i>et al</i>	Michal and Sinclair
a	0.2889 nm	0.2898 nm	0.2885 nm
b	0.4120 nm	0.4108 nm	0.4622 nm
c	0.4662 nm	0.4646 nm	0.4120 nm
$\beta$	96.8°	97.78°	96.8°

Figure 38 Différents paramètres de mailles pour la martensite

Les paramètres sont différents d'un auteur à l'autre puisqu'ils dépendent de la procédure ainsi que de l'équipement utilisé [61]. De plus, la composition ainsi que le type de traitement thermique appliqué à l'échantillon génère une différence de mesure pour les



paramètres de mailles [62]. Par contre, les ordres de grandeur sont toujours respectés et on ne parle que de légères différences. Étant donné qu'Otsuka semble être le plus souvent cité, ses paramètres de mailles seront utilisés.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0.3015nm \\
 a &= 0.2889nm \\
 b &= 0.4120nm \\
 c &= 0.4622nm \\
 \beta &= 96.8^\circ
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

On trouve finalement la matrice de distorsion D suivante :

$$D_{ik} = \begin{bmatrix} -0.0337 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0763 & -0.0642 \\ 0 & -0.0642 & -0.0418 \end{bmatrix}
 \tag{2.13}$$

On remarque immédiatement dans cette matrice un cisaillement qui caractérise le changement de phase d'un AMF. Par contre, puisqu'il est difficile d'imaginer conceptuellement les cisaillements, il est facile de les éliminer à l'aide du cercle de Mohr. On obtient alors une matrice équivalente de la forme suivante :

$$D_{ik} = \begin{bmatrix} -0.0337 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0763 & -0.0642 \\ 0 & -0.0642 & -0.0418 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0337 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1045 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0699 \end{bmatrix}
 \tag{2.14}$$

On remarque à nouveau que la déformation maximale, pour une contrainte alignée dans le sens de la variante, est de 10.45 %, ce qui correspond bien à la littérature pour un monocristal. En effet, les auteurs Bhattacharya et Kohn [63] stipulent que pour un

crystal de NiTi, la déformation doit être comprise entre 3 et 10.5 % dépendamment de l'orientation de la contrainte.

De plus, en comparant la matrice de déformation calculée avec celle des auteurs Bhattacharya et Kohn [63], on remarque une très grande similitude. La différence entre les deux provient probablement de la différence entre les paramètres de mailles utilisés puisque ces derniers varient légèrement dépendamment de la personne ayant effectué les mesures ou de l'appareil utilisé.

$$\begin{bmatrix} -0.0337 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1066 & 0 \\ 0 & 0 & -0.068 \end{bmatrix}_{\text{Bhattacharya}} \approx \begin{bmatrix} -0.0337 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1045 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0699 \end{bmatrix}_{\text{calculer}} \quad (2.15)$$

Finalement, lors d'un entretien, le professeur A. Volkov de l'université d'état de St-Pétersbourg en Russie prétend avoir mesuré un changement de volume de l'ordre de 0.08 %. Effectivement, si l'on calcule la trace de la matrice, ce qui se résume à faire la sommation de la diagonale de cette dernière, on trouve le changement de volume qui correspond à 0.0841 % ce qui appuie encore une fois la validité de la matrice.

### 2.2.2 Matrice de rotation

Avant d'utiliser la matrice de distorsion, il est important d'introduire la matrice de rotation. Cette matrice est nécessaire puisque la déformation du grain devra être ramenée dans le référentiel de l'échantillon. Ces matrices sont utilisées de manière courante dans différentes disciplines telles que la robotique, l'informatique et bien d'autres. Pour ramener un référentiel local  $x, y$  et  $z$  dans un référentiel global  $X, Y$  et  $Z$ , il est nécessaire d'utiliser la procédure suivante. Pour ce faire, il faut tout d'abord aligner les axes  $Z, z$  et  $y$  dans le même plan, c'est-à-dire qu'il faut tourner le référentiel local d'un angle  $\gamma$  autour de  $z$  comme le montre la figure 39.

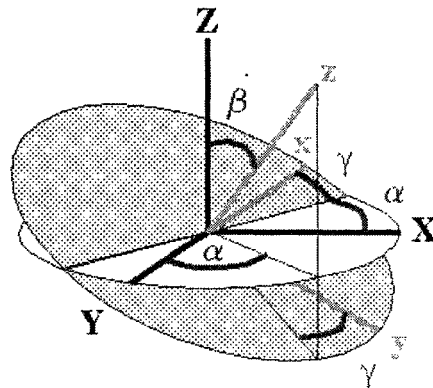


Figure 39 Rotation autour de z

Par la suite, les deux plans (grisé et blanc) sont alignés en effectuant une rotation autour de l'axe x d'un angle  $\beta$ . Cet angle prend donc une valeur comprise entre 0 et 180 degrés. On aligne ainsi les axes Z et z.

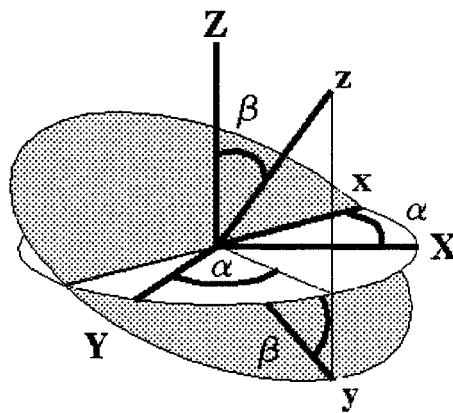


Figure 40 Rotation autour de x

Finalement, une dernière rotation autour de Z d'un angle  $\alpha$  est nécessaire afin de juxtaposer le référentiel local au référentiel global.

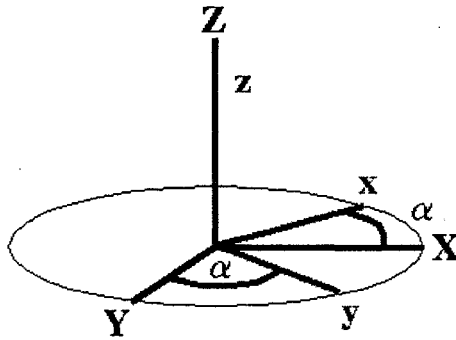


Figure 41 Rotation autour de l'axe Z

Les trois angles présentés dans la description précédente sont les angles d'Euler. Ces derniers sont bien connus et peuvent prendre les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha \leq 360 \\ 0 &\leq \beta \leq 180 \\ 0 &\leq \gamma \leq 360 \end{aligned} \quad (2.16)$$

De plus, on remarque que trois rotations sont nécessaires et que la séquence est la suivante :  $zxz$ . À partir de ces informations, il est essentiel de construire les deux matrices de rotation, soit celle autour de l'axe  $z$  et celle autour de l'axe  $x$ . Pour ce faire, on débute à l'aide d'une analogie 2D simple comme à la figure 42 :

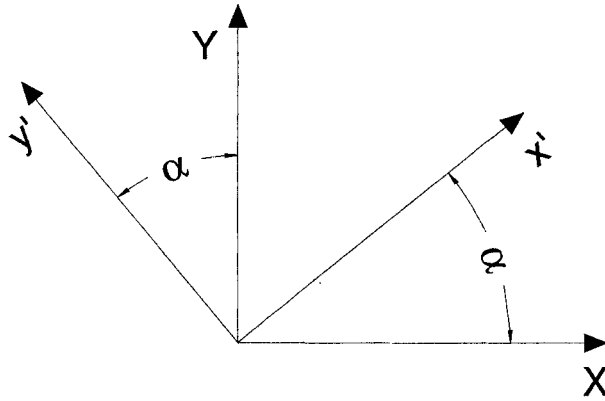


Figure 42 Rotation 2D autour de Z

Par la **trigonométrie**, il est possible de trouver les composantes des axes du référentiel local **dans** l'axe du référentiel global :

$$\begin{aligned} X &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ Y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ Z &= z' \end{aligned} \quad (2.17)$$

Par la **suite**, pour trouver la matrice de rotation, il suffit d'exprimer les trois équations dans **une** formulation matricielle :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\text{rotz}] * \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

De la **même** façon, il est possible d'obtenir la matrice de rotation autour de l'axe x qui s'écrit **comme** suit :

$$[rotx] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Finalement, puisque l'on connaît la séquence à utiliser, il est possible, à l'aide du calcul matriciel, de trouver une matrice de rotation globale. Pour cela, on n'a qu'à effectuer la multiplication donnée à l'équation (2.20) pour trouver la solution. Les variables de la matrice sont soit précédées d'un c ou d'un s pour cosinus ou pour sinus respectivement.

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= [rotz(\gamma)] * [rotx(\beta)] * [rotz(\alpha)] \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha * c\gamma - s\alpha * c\beta * s\gamma & -c\alpha * s\gamma - s\alpha * c\beta * c\gamma & s\alpha * s\beta \\ s\alpha * c\gamma + c\alpha * c\beta * s\gamma & -s\alpha * s\gamma + c\alpha * c\beta * c\gamma & -c\alpha * s\beta \\ s\beta * s\gamma & s\beta * c\gamma & c\beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Cette matrice permet de transposer les coordonnées d'un point dans un référentiel local vers un référentiel global. Par contre, un point est représenté par une colonne à trois rangées et une déformation est représentée par une matrice de trois par trois. Cette différence nécessite seulement quelques notions de mathématique [64] et le résultat peut s'écrire soit de façon tensorielle, comme à l'équation (2.21), ou soit de façon matricielle, comme à l'équation (2.22) où  $T'$  exprimée est la variable  $T$  dans le référentiel global et que  $[ ]^t$  représente la transposée de la matrice de rotation.

$$T'_{ij} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} T_{pq} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} [T'] &= [\alpha][T][\alpha]' \\ [T] &= [\alpha]' [T'] [\alpha] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Maintenant, à partir de ces résultats, il est possible de transposer toutes les déformations d'un référentiel local à un référentiel global si les trois angles d'Euler sont connus.

### 2.2.3 Notions de micromécanique

Actuellement, toutes les notions de déformation et de rotation sont connues. Il est maintenant temps de combiner ces notions pour représenter les mécanismes utilisés dans les modèles micromécaniques développés dans la littérature. Tout d'abord, la matrice de distorsion  $D$  permet de trouver les déformations pour une transformation complète. En émettant l'hypothèse que la transformation se produit progressivement et linéairement, il est possible d'énoncer l'équation (2.23) suivante :

$$\varepsilon^\mu = D_{ik} * \Phi^\sigma \quad (2.23)$$

où  $\varepsilon^\mu$  est la déformation de transformation du grain tandis que  $\Phi$  représente la proportion de martensite orientée dans le grain. Cette proportion de martensite est le pourcentage de transformation. Sa valeur doit donc être comprise entre zéro et un. La déformation ainsi obtenue est la déformation du grain dans son référentiel propre. Pour trouver la déformation dans le référentiel global, il suffit d'appliquer la matrice de rotation développée dans la section précédente et l'on trouve l'équation (2.24) suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pq}^{tr} &= \alpha_{pi} * \alpha_{qk} * \varepsilon_{ik}^\mu \\ \text{ou} \\ \varepsilon_{pq}^{tr} &= \alpha_{pi} * \alpha_{qk} * D_{ik} * \Phi^\sigma \end{aligned} \quad (2.24)$$

Présentement, la déformation ainsi calculée représente la déformation d'un grain dans le référentiel global. Toutefois, cette déformation ne représente pas encore la déformation macroscopique de l'échantillon. Pour trouver cette déformation macroscopique, le calcul

de la déformation de transformation de tous les grains est nécessaire. On doit donc effectuer une moyenne de la façon suivante :

$$\varepsilon_{pq}^{tr} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \alpha_{pi}^n * \alpha_{qk}^n * D_{ik} * \Phi_n^\sigma \quad (2.25)$$

où N est le nombre de grains dans le matériau. Dans la réalité, ce nombre est très élevé. Dans ce rapport, une étude a été effectuée afin de connaître le nombre de grains optimal, c'est-à-dire un nombre suffisamment grand pour éliminer tout phénomène de texture numérique sans toutefois augmenter le temps de calcul et la marge d'erreur. Les résultats sont présentés à la section 3.1.5 de ce rapport. L'équation (2.25) permet donc de calculer la déformation de transformation. Par contre, cette dernière n'est pas la seule impliquée. En effet, la déformation globale est constituée de la déformation de transformation, de la déformation élastique ainsi que de la déformation thermique causée par les changements de température. On trouve alors l'équation (2.26) suivante :

$$\varepsilon_{totale} = \varepsilon_{tr} + \varepsilon_{elas} + \varepsilon_{th} \quad (2.26)$$

Dans ce modèle, la déformation thermique sera négligée puisqu'elle est très petite comparée aux deux autres déformations. La déformation élastique, pour sa part, se calcule comme pour un matériau isotrope, c'est-à-dire à l'aide de l'équation suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.27)$$

où  $\varepsilon$  est la déformation, E est le module de Young,  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $\sigma$  est la contrainte appliquée. Toutefois, il faut se souvenir, selon le tableau II, que les propriétés de la martensite et de l'austénite ne sont pas les mêmes. De plus, la phase R sera ajoutée afin d'obtenir un modèle le plus général possible. Il est donc nécessaire de



modifier l'équation afin d'obtenir les résultats désirés. Pour ce faire, il suffit de calculer l'équation à trois reprises : la première avec les propriétés de l'austénite, la seconde avec les propriétés de la martensite et la dernière avec les propriétés de la phase R. En utilisant les proportions adéquates, on calcule la contribution des déformations de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{elas} = & (1 - \Phi_m - \Phi_R) \left( \frac{1 + \nu_a}{E_a} \sigma_{ij} - \frac{\nu_a}{E_a} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \dots \\
 & \dots + \Phi_m \left( \frac{1 + \nu_m}{E_m} \sigma_{ij} - \frac{\nu_m}{E_m} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \dots \\
 & \dots + \Phi_R \left( \frac{1 + \nu_R}{E_R} \sigma_{ij} - \frac{\nu_R}{E_R} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Cette équation utilise les variables  $\Phi_R$  et  $\Phi_m$  qui sont respectivement la proportion de phase R globale et la proportion de martensite globale. Il n'est pas nécessaire de calculer la déformation élastique pour chaque grain puisque cette dernière ne dépend pas de l'orientation du grain. Il est donc plus simple de calculer la déformation élastique de façon macroscopique, c'est-à-dire pour l'échantillon complet dans le référentiel global. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle les proportions de martensite et de phase R sont dites globales.

#### 2.2.4 Proportion de martensite et de phase R

La plupart des variables utilisées jusqu'à maintenant sont connues ou sont facilement mesurables ou calculables, c'est-à-dire les coefficients de Poisson, les modules de Young, les matrices de rotation et de distorsion. Les autres variables sont imposées par l'utilisateur, comme le nombre de grains, la contrainte, la texture ainsi que la température de l'échantillon. Cependant, la proportion de martensite doit absolument être déterminée et elle est nécessaire pour le calcul des déformations.

La proportion de martensite est calculée selon l'approche proposée par Brinson [51; 53-55], c'est-à-dire qu'on sépare la proportion de martensite en deux, en une martensite autoaccomodante et en une martensite orientée. Toutefois, une différence est apportée ici. En effet, les relations de type cosinus proposées par Brinson et montrées à la figure 43 sont remplacées par des droites comme à la figure 44.

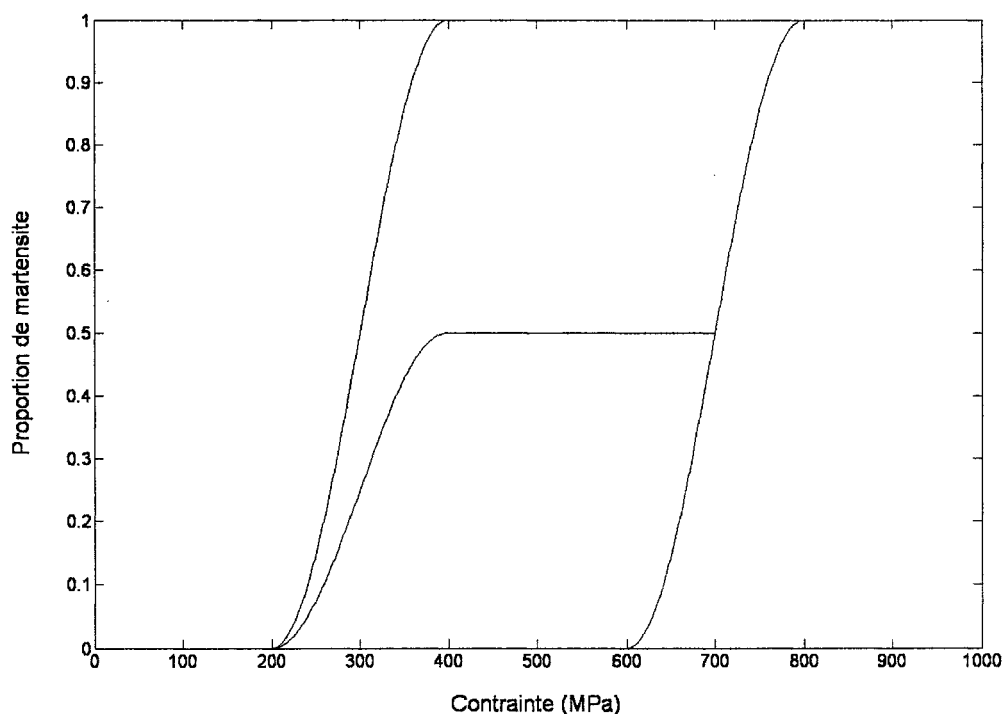


Figure 43 Proportion de martensite selon Brinson pour une température donnée

De plus, les sous-cycles sont calculés différemment. En effet, si l'on regarde la figure 43 et la figure 44, on remarque immédiatement la différence entre les courbes pour un chargement complet et un sous-cycle. Il est à noter que la proportion de martensite représentée dans ces figures est la somme de la proportion de martensite autoaccomodante et de martensite orientée pour un grain, et doit encore une fois être comprise entre zéro et un. Ces changements n'ont qu'un seul but, soit faciliter la

compréhension et simplifier les calculs puisque la proportion de martensite de Brinson semble plus réaliste.

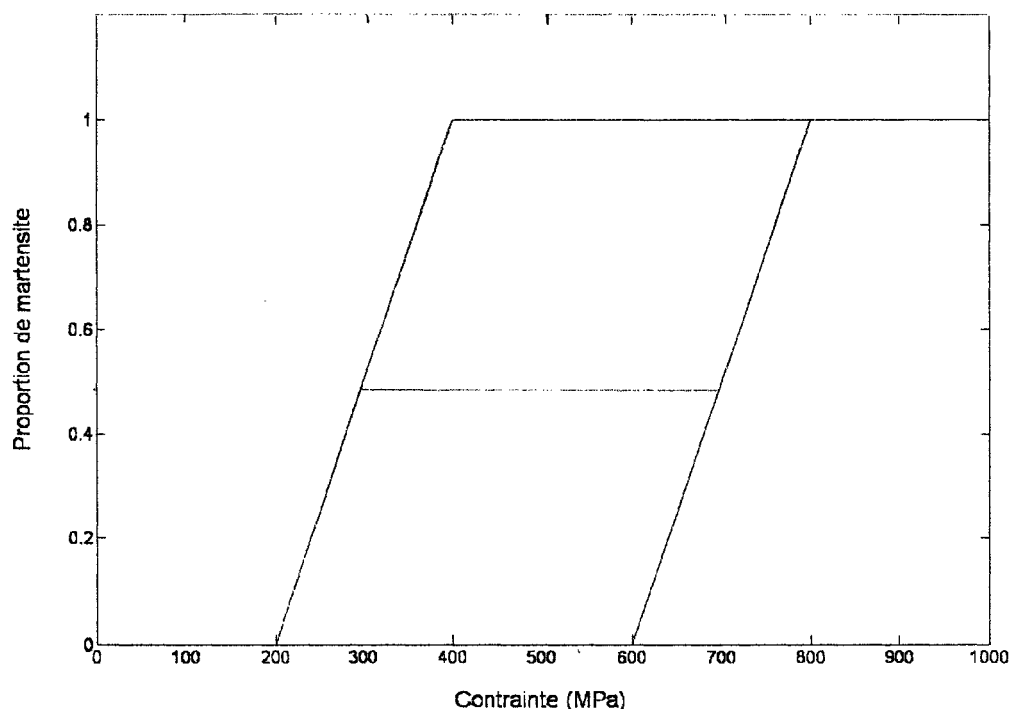


Figure 44 Proportion de martensite selon le modèle hybride pour une température donnée

#### 2.2.4.1 Proportion de martensite orientée

Le calcul de la proportion de martensite orientée est fort simple. Par contre, il faut préalablement établir le diagramme de phase, comme par exemple celui à la figure 45. Ce dernier comporte les six températures de transformation ainsi que la droite P de plasticité. Il est légèrement plus complexe que celui de la figure 3 qui est le même diagramme, mais simplifié. Le calcul de la proportion de martensite orientée s'effectue selon les droites de transformation. En effet, en connaissant la température, il est possible de trouver les valeurs des contraintes critiques  $\sigma_{Ms}$ ,  $\sigma_{Mf}$ ,  $\sigma_{Af}$  et  $\sigma_{As}$ . À l'aide de ces quatre points, il est possible de construire une hystérésis comme celle de la figure 44.

Finalement, en connaissant la contrainte appliquée, il suffit de calculer la proportion de martensite orientée. Il faut cependant connaître l'historique de chargement. En effet, il existe plusieurs valeurs de proportion pour une contrainte donnée, mais connaissant les conditions initiales, il est possible de trouver la bonne valeur. En considérant l'hypothèse de départ (la proportion de martensite varie linéairement), il est possible d'écrire ceci sous forme d'équation de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \Phi_n^\sigma = & \frac{\sigma - \sigma_{M_s}}{\sigma_{M_f} - \sigma_{M_s}} \cdot H(-(\Phi_{n0}^\sigma(\sigma_{M_f} - \sigma_{M_s}) + \sigma_{M_s} - \sigma)) \\
 & + \frac{\sigma - \sigma_{A_f}}{\sigma_{A_s} - \sigma_{A_f}} \cdot H(\Phi_{n0}^\sigma(\sigma_{A_s} - \sigma_{A_f}) + \sigma_{A_f} - \sigma) \\
 & + \Phi_{n0}^\sigma \cdot H(-(\Phi_{n0}^\sigma(\sigma_{A_s} - \sigma_{A_f}) + \sigma_{A_f} - \sigma)) \cdot H(\Phi_{n0}^\sigma(\sigma_{M_f} - \sigma_{M_s}) + \sigma_{M_s} - \sigma)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

L'équation (2.29) peut être divisée en trois. La première partie permet de calculer la proportion de martensite pour la transformation de l'austénite vers la martensite, tandis que la seconde permet le même calcul, mais pour la transformation de la martensite vers l'austénite. Finalement, la dernière partie permet le calcul de la proportion de martensite s'il n'y a pas de transformation. Bref, on garde la proportion de martensite initiale s'il n'y a pas de changement. La fonction Heaviside  $H(x)$  vaut 1 lorsque l'argument est plus grand ou égale à zéro et vaut 0 lorsque l'argument est plus petit que zéro, ce qui permet de connaître le sens du chargement thermomécanique et donc de choisir l'équation appropriée. Finalement, il est à noter qu'il faut aussi s'assurer que la valeur de  $\Phi$  doit être comprise entre 0 et 1.

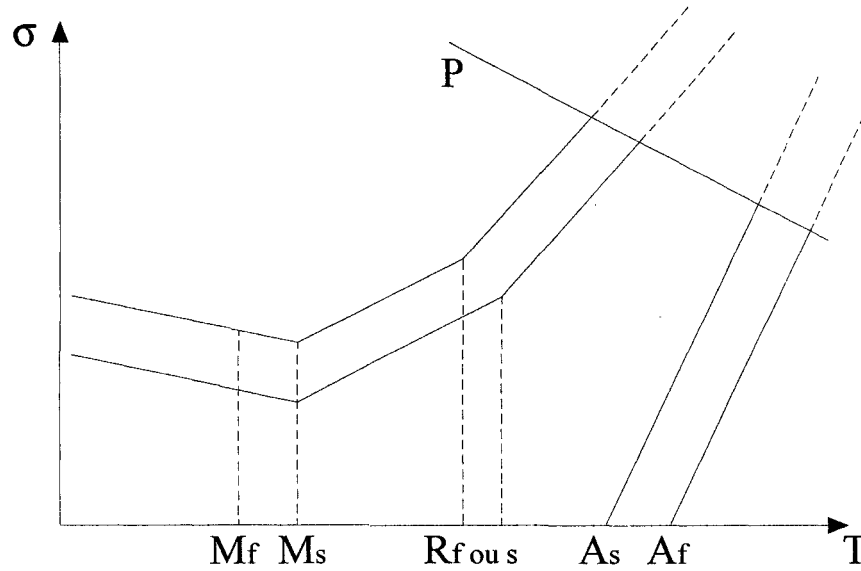


Figure 45 Diagramme de phase

#### 2.2.4.2 Proportion de martensite autoaccomodante

Cette proportion de martensite ne génère pas de déformation de transformation tout comme dans la réalité. Par contre, elle est essentielle pour le calcul des déformations élastiques. Elle permet de connaître les caractéristiques de l'échantillon. Par hypothèse, la proportion est supposée linéaire entre les deux températures de transformation. Il est donc possible d'écrire l'équation suivante :

$$\Phi^T = \frac{T_{M_s} - T}{T_{M_s} - T_{M_f}} \quad (2.30)$$

Par contre, la proportion de martensite orientée domine sur la proportion de martensite autoaccomodante. Cela implique donc que la proportion de martensite autoaccomodante doit respecter la relation suivante :

$$\Phi_n^T \leq 1 - \Phi_n^\sigma \quad (2.31)$$

### 2.2.4.3 Proportion de martensite globale

La proportion de martensite globale est indispensable pour le calcul des déformations élastiques. Cette proportion est tout simplement la moyenne de la somme des deux proportions de martensite de tous les grains et peut s'écrire de la façon suivante :

$$\Phi_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\Phi_n^\sigma + \Phi_n^T) \quad (2.32)$$

où N est le nombre de grains.

### 2.2.4.4 Proportion de phase R

Il est à noter que les températures de la phase R ne sont pas nécessairement présentes au chauffage et/ou au refroidissement. Par contre, si elles sont présentes lors du chauffage et du refroidissement, par hypothèse, les températures seront les mêmes, mais inversées, c'est-à-dire que  $R_s$  au chauffage sera  $R_f$  au refroidissement et inversement pour  $R_f$ . Par exemple, pour une phase R présente au chauffage et au refroidissement, on aura pour le chauffage  $R_s = a$  et  $R_f = b$  tandis qu'au refroidissement, on aura  $R_s = b$  et  $R_f = a$ . En effet, la phase R a un hystérésis de seulement quelques degrés et peut donc être négligée [32]. De plus, la phase R peut être considérée comme la phase de martensite [65]. Finalement, puisque la déformation de transformation produite par la phase R est beaucoup plus petite que celle de la transformation de la martensite, et qu'à cause de l'hypothèse d'un hystérésis négligeable, il est possible de supposer que la phase R ne génère pas de déformation de transformation et peut donc être calculée de façon linéaire tout comme la proportion de martensite autoaccommodante, c'est-à-dire comme dans l'équation suivante :

$$\Phi^R = \frac{T - R_s}{R_f - R_s} \quad (2.33)$$

De plus, la proportion des différentes phases dans l'échantillon ne peut dépasser 1, donc il est nécessaire de respecter la relation suivante :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\Phi_n^\sigma + \Phi_n^T + \Phi_n^R) \leq 1 \quad (2.34)$$

Cependant, la proportion de martensite autoaccomodante domine lors du refroidissement, tandis que pour le chauffage, la phase R domine sur la proportion de martensite autoaccomodante, et cela, tout en considérant la proportion de martensite orientée. Il est donc indispensable de respecter les relations du tableau suivant :

Tableau III

Relations nécessaires aux calculs de la phase R

Chauffage	Refroidissement	
$\Phi_n^R \leq 1 - \Phi_n^\sigma$	T > Ms $\Phi_n^R \leq 1 - \Phi_n^\sigma$	T < Ms $\Phi_n^R \leq 1 - \Phi_n^\sigma - \Phi_n^T$

#### 2.2.4.5 Proportion de phase R globale

Tout comme pour la proportion de martensite, la proportion de phase R globale est la moyenne de la phase R dans tous les grains et se calcule de la façon suivante :

$$\Phi_R = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_n^R \quad (2.35)$$

Cette proportion est nécessaire pour le calcul des déformations élastiques.

### 2.2.5 Variante de martensite numérique

Plutôt que de traiter les 24 variantes possibles, le présent modèle ne considère que trois variantes qui peuvent se développer selon les axes principaux du grain. Pour procéder, il faut tout d'abord transférer la contrainte appliquée dans le système global vers le référentiel local du grain. Une matrice de contrainte est ainsi créée. En observant la diagonale, on peut trouver dans quel axe la contrainte est la plus élevée et ainsi connaître la variante qui va se développer. Les variantes sont construites à partir de la matrice de distorsion. En effet, il suffit de modifier la matrice pour obtenir le sens de transformation positif voulu. Cette approche est fort simple et résume en soit ce que le facteur de Schmid réalise [66]. Finalement, on obtient ainsi les trois variantes suivantes :

Tableau IV

Les trois variantes numériques de martensite possibles

Direction de la contrainte la plus élevée	Matrice de transformation
x	$\begin{bmatrix} 0.1045 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0337 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0699 \end{bmatrix}$
y	$\begin{bmatrix} -0.0337 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1045 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0699 \end{bmatrix}$
z	$\begin{bmatrix} -0.0337 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0699 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1045 \end{bmatrix}$



## 2.3 Modèle de transfert thermique

Jusqu'ici, le modèle créé dépend de la contrainte et de la température, et permet de trouver la déformation. Bien que le changement de phase se produise à des vitesses supérieures à la vitesse du son ( $\sim 10^5$  cm/sec) [67], les AMF ne sont pas rapides. En effet, la température ne change pas instantanément dans l'échantillon à cause de l'inertie thermique. Il est donc nécessaire de créer un modèle de transfert de chaleur qui ajoutera la dimension temporelle de l'AMF. D'ailleurs, l'auteur Wu [68] a étudié la vitesse de cyclage d'un AMF et a conclu qu'elle n'avait aucune influence sur le comportement du matériau, par exemple pour un essai de traction, à condition que la chaleur latente ne chauffe ou ne refroidisse ce dernier lors du changement de phase.

### 2.3.1 Hypothèse et équation de base

Le modèle de transfert de chaleur utilise la même approche que celle proposée par Shanin [69]. En effet, en modélisant l'AMF comme à la figure 46 et à partir de l'équation différentielle générale de transfert de chaleur (équation (2.36)) fournie par Incropera et DeWitt [70], il est possible de calculer assez simplement les phénomènes de transfert de chaleur où  $r$ ,  $\theta$  et  $Z$  sont les coordonnées d'un point dans un référentiel cylindrique,  $V$ , le volume,  $k$ , la conductivité du matériau,  $q$ , la chaleur et  $E$ , l'énergie.

$$V \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( kr \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.36)$$

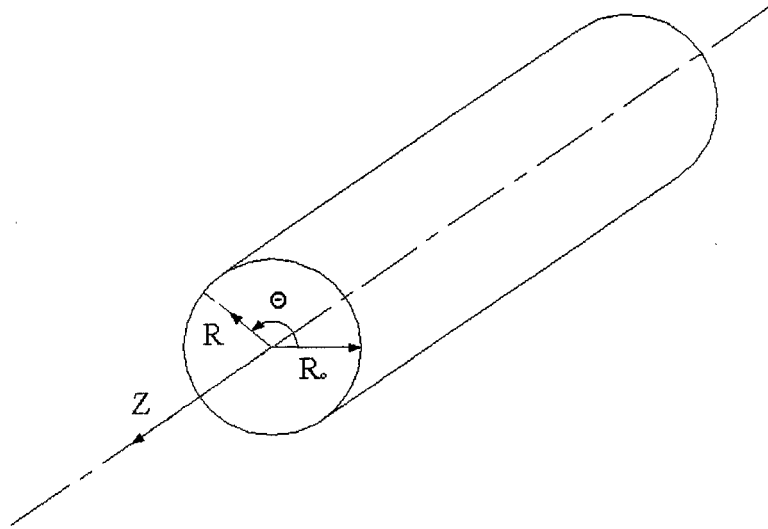


Figure 46 Schématisation et référentiel de l'AMF

Afin de simplifier l'équation, il est possible d'émettre certaines hypothèses. En effet, si on suppose que le rapport de la longueur du fil versus le rayon du fil est supérieur à 10 [70], alors il est possible de prétendre que la variation de température le long de l'axe Z est 0. De plus, en supposant que les conditions environnantes sont identiques tout autour du fil, la variation de température le long de l'axe  $\theta$  est alors nulle. Aussi, si le diamètre du fil est faible, on peut supposer que la température à l'intérieur du fil est uniforme, et donc que la variation de température le long de l'axe R est également nulle. Finalement, on obtient donc, après simplification, l'équation suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.37)$$

Le premier terme de l'équation est le bilan thermique tandis que le second est l'énergie emmagasinée.

### 2.3.2 Bilan thermique

Le bilan thermique est relativement simple. En effet, la chaleur entrante est générée par effet Joule, c'est-à-dire avec l'équation de puissance électrique  $P = RI^2$  tandis que la chaleur sortante est dissipée par convection, conduction et/ou radiation. Ici, afin de simplifier les calculs, le transfert de chaleur sera approximé à l'aide d'une résistance thermique. On obtient donc :

$$R_{elec} I^2 - \frac{T_s - T_{ambient}}{R_{thermique}} = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (2.38)$$

où  $R_{elec}$  est la résistance électrique,  $I$  le courant,  $T_s$  la température du fil,  $T_{ambient}$  la température de l'environnement et  $R_{thermique}$  la résistance thermique.

### 2.3.3 Énergie emmagasinée

L'énergie emmagasinée se calcule comme pour les autres matériaux, c'est-à-dire à l'aide de la masse  $m$ , de la chaleur spécifique  $C_p$  et de la variation de la température  $dT/dt$ .

$$m C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.39)$$

Par contre, la transformation de l'austénite vers la martensite est une transformation exothermique (génération de chaleur), tandis que la transformation de la martensite à l'austénite est une transformation endothermique (absorption de chaleur). Il est donc nécessaire d'ajouter un second terme qui simulera la transformation martensitique. Ce terme varie donc en fonction de la proportion de martensite globale  $\Phi_m$  et de la chaleur latente  $H$ .

$$mC_p \frac{\partial T}{\partial t} + mH \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.40)$$

Cette équation suppose qu'il n'y pas de chaleur générée ou absorbée par le changement de phase R. Cependant, puisque la phase R se comporte comme la martensite, il est possible d'ajouter un terme semblable de la même façon :

$$mC_p \frac{\partial T}{\partial t} + mH_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} + mH_R \frac{\partial \Phi_R}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.41)$$

L'équation est ainsi beaucoup plus complète et il est maintenant possible en combinant les équations (2.41) et (2.38) dans l'équation (2.37) d'obtenir l'équation finale suivante :

$$R_{elec} I^2 - \frac{T_s - T_{ambiant}}{R_{thermique}} = mC_p \frac{\partial T}{\partial t} + mH_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} + mH_R \frac{\partial \Phi_R}{\partial t} \quad (2.42)$$

### 2.3.4 Température de l'AMF

Il est maintenant facile, à l'aide du modèle de transfert de chaleur, de trouver la température de l'AMF en fonction du courant et des conditions aux frontières. Cependant, pour utiliser l'équation (2.42), il est indispensable de connaître la proportion de martensite et de phase R. Ces proportions se calculent aisément à l'aide du modèle d'AMF. Par contre, la température est une variable d'entrée de ce modèle. Il est donc nécessaire d'effectuer un processus itératif, c'est-à-dire qu'il faut d'abord calculer la température sans tenir compte des effets des changements de phase. Par la suite, à l'aide du modèle d'AMF et de la température trouvée, on calcule les proportions de phase. Avec ces derniers résultats, on recalcule la température et on recommence ces étapes jusqu'à ce que la température ait convergée. La figure 47 résume ce que l'on doit faire pour trouver la température de l'échantillon.

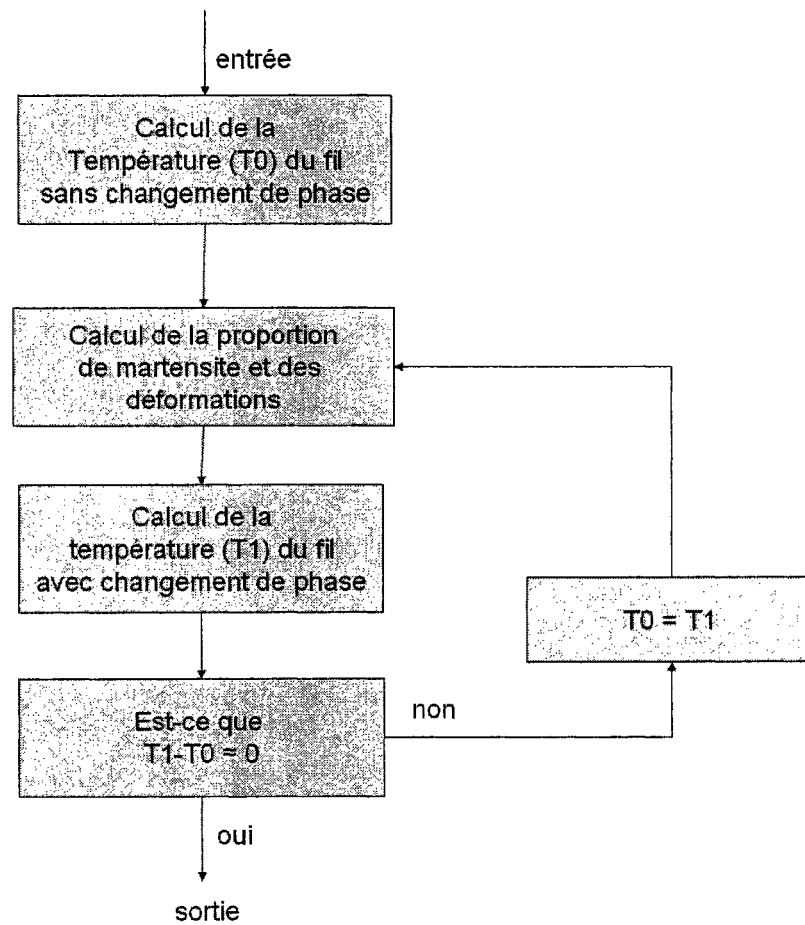


Figure 47 Processus itératif pour le calcul de la température

## CHAPITRE 3

### ÉTUDE PARAMÉTRIQUE DU MODÈLE

Afin de mieux comprendre l'enjeu de certaines variables, il est important de faire quelques tests numériques. En effet, en changeant la valeur d'une variable particulière, il est possible de comprendre et de voir à l'aide de résultats, l'impact de cette dernière sur le modèle. Par conséquent, en connaissant les variables qui ont le plus d'influence sur le comportement de l'alliage, il est possible de choisir un matériau judicieux qui répondra aux besoins prédéfinis d'une application donnée. Tout d'abord, le matériau de la figure 48 est utilisé afin de vérifier le comportement général du modèle. Les valeurs utilisées se retrouvent dans le tableau V.

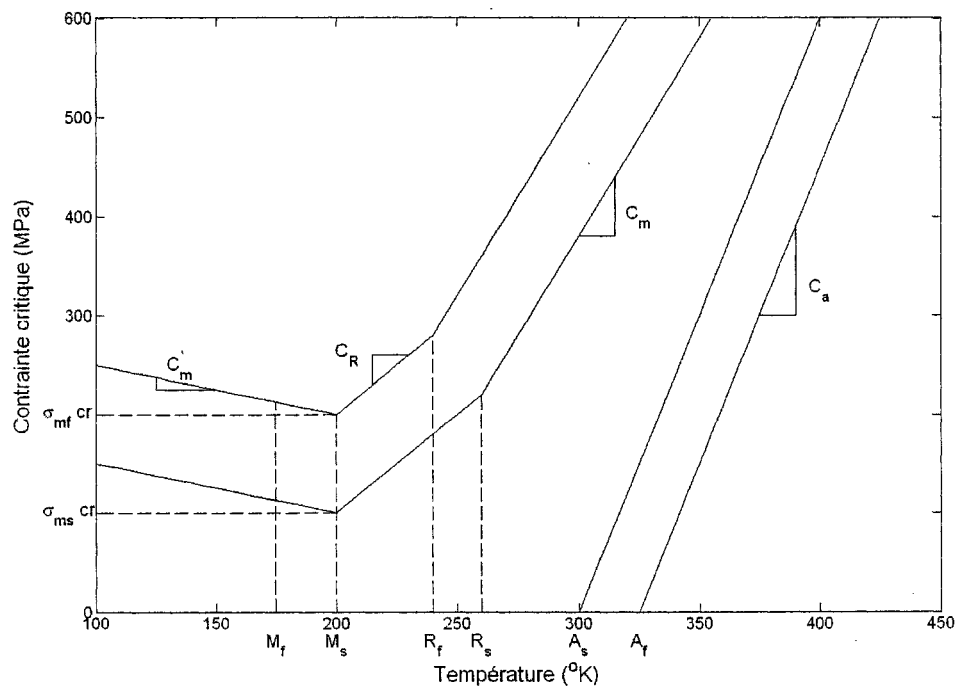


Figure 48 Diagramme de phase du matériau fictif

Tableau V  
Propriétés du matériau utilisé  
pour l'étude paramétrique

Propriétés	Symbole	Unité	Valeur
Module de Young de la martensite	$E_M$	GPa	30
Module de Young de l'austénite	$E_A$	GPa	60
Module de Young de la phase R	$E_R$	GPa	45
Coefficient de Poisson de la martensite	$\nu_M$		0.3
Coefficient de Poisson de l'austénite	$\nu_A$		0.3
Coefficient de Poisson de la phase R	$\nu_R$		0.3
Température de début de transformation de la martensite	$M_s$	K	200
Température de début de transformation de l'austénite	$A_s$	K	300
Température de fin de transformation de la martensite	$M_f$	K	175
Température de fin de transformation de l'austénite	$A_f$	K	325
Température de début de transformation de la phase R	$R_s$	K	260
Température de fin de transformation de la phase R	$R_f$	K	240
Taux de variation de la contrainte en fonction de la température pour la martensite	$C_m$	MPa / K	4

Taux de variation de la contrainte en fonction de la température pour la martensite	$C_a$	MPa / K	6
Taux de variation de la contrainte en fonction de la température pour la martensite	$C_R$	MPa / K	2
Taux de variation de la contrainte en fonction de la température pour l'austénite	$C_m^*$	MPa / K	-1/2
Contrainte critique martensite finish	$\sigma_{mf\ cr}$	MPa	200
Contrainte critique martensite start	$\sigma_{ms\ cr}$	MPa	100
Diamètre de l'échantillon	d	mm	0.5
Longueur de l'échantillon	L	mm	70
Densité	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	6500
Résistivité	$\rho_{elec}$	$\mu\Omega \cdot m$	1.166
Chaleur spécifique	$C_p$	J / kg*K	450
Chaleur latente	H	kJ / kg	20
Résistance thermique	$R_{ther}$	K / W	45
Nombre de grains	N		200

De plus, un volume de matière constitué de 200 grains est employé. Cependant, les angles d'Euler de chaque grain sont générés aléatoirement, il n'y a donc aucune texture de définie préalablement.



### 3.1 Test sur le modèle mécanique

La prochaine section ne traite que du comportement mécanique puisqu'il est plus simple de procéder ainsi. En effet, lorsque le modèle mécanique fonctionnera avec certitude l'analyse des variables dynamiques pourra être réalisée plus facilement.

#### 3.1.1 Effet mémoire de forme

Comme décrit dans le chapitre 1, il est possible d'avoir différentes courbes qui mènent à l'effet mémoire de forme. La figure 49 représente un effet mémoire de forme qui débute avec 100 % austénite. Avec attention, on remarque que la pente des deux droites de déformation élastique est différente. Cela semble juste puisque le module de Young est différent pour l'austénite et la martensite. De plus, puisque la température est supérieure à  $M_s$  et  $R_s$ , aucune transformation de martensite autoaccomodante et de phase R n'est possible. À l'inverse, la figure 50 représente un effet mémoire de forme qui débute à 100 % martensite, on remarque rapidement que les pentes sont identiques. Par contre, la proportion de martensite autoaccomodante passe de 1 à 0 tandis que la proportion de martensite orientée passe de 0 à 1. Il n'y a pas non plus de transformation de phase R, ce qui semble tout à fait logique puisqu'on effectue l'essai à une température inférieure à  $M_s$ .

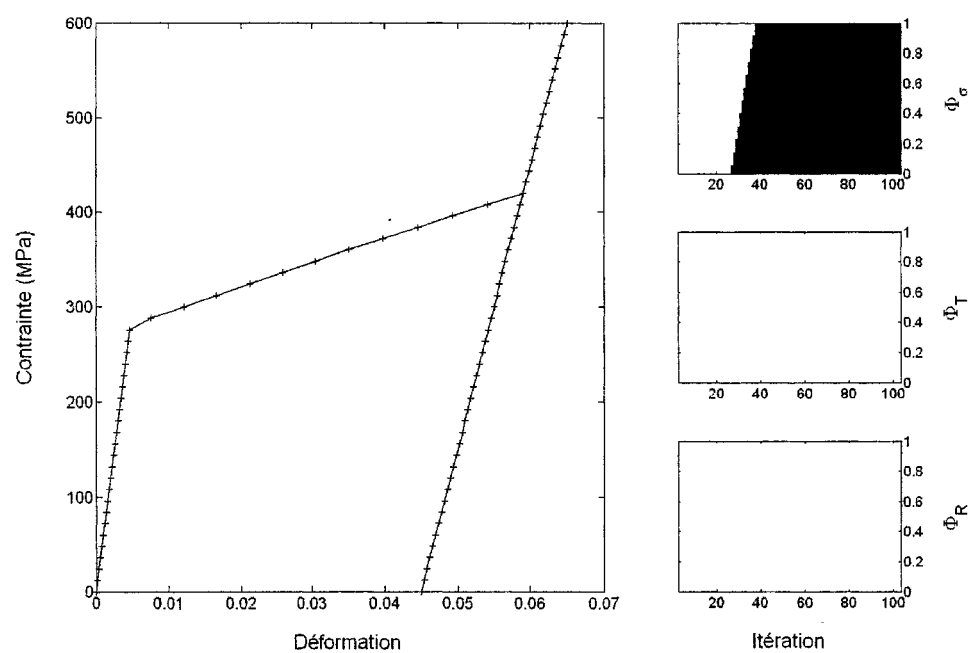


Figure 49 Effet mémoire de forme débutant à 100 % austénite à  $T=275$  K

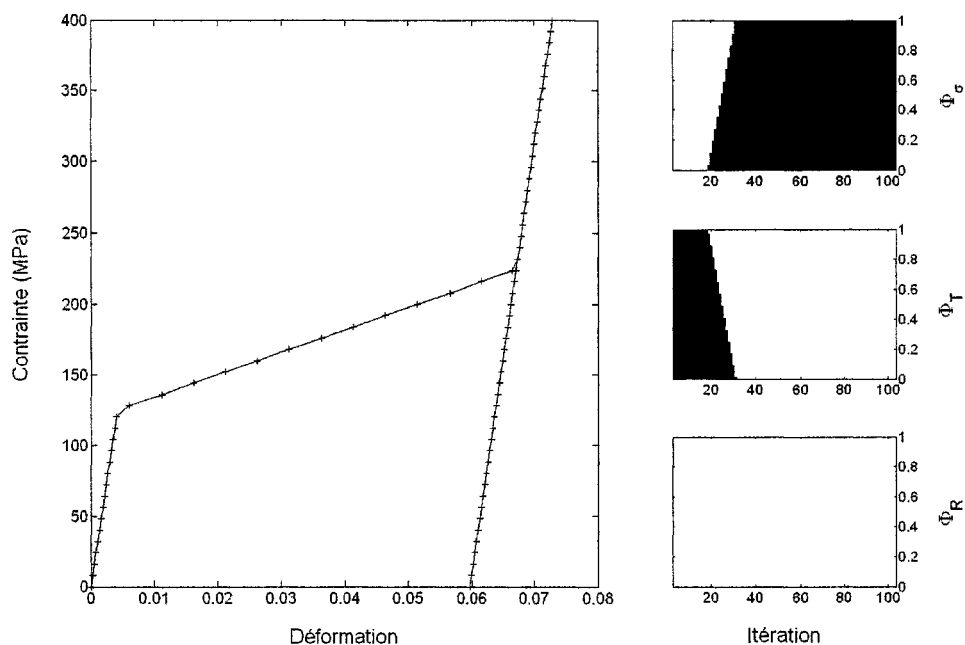


Figure 50 Effet mémoire de forme débutant 100 % martensite à  $T=150$  K

Finalement, la figure 51 représente un effet mémoire de forme avec reprise de forme lors du chauffage. On débute tout d'abord à 100 % austénite et, lors du refroidissement, on passe par la phase R pour ensuite retransformer en martensite autoaccomodante. Lors de l'application de la contrainte, on transforme en martensite orientée pour finalement retransformer en austénite lors du chauffage.

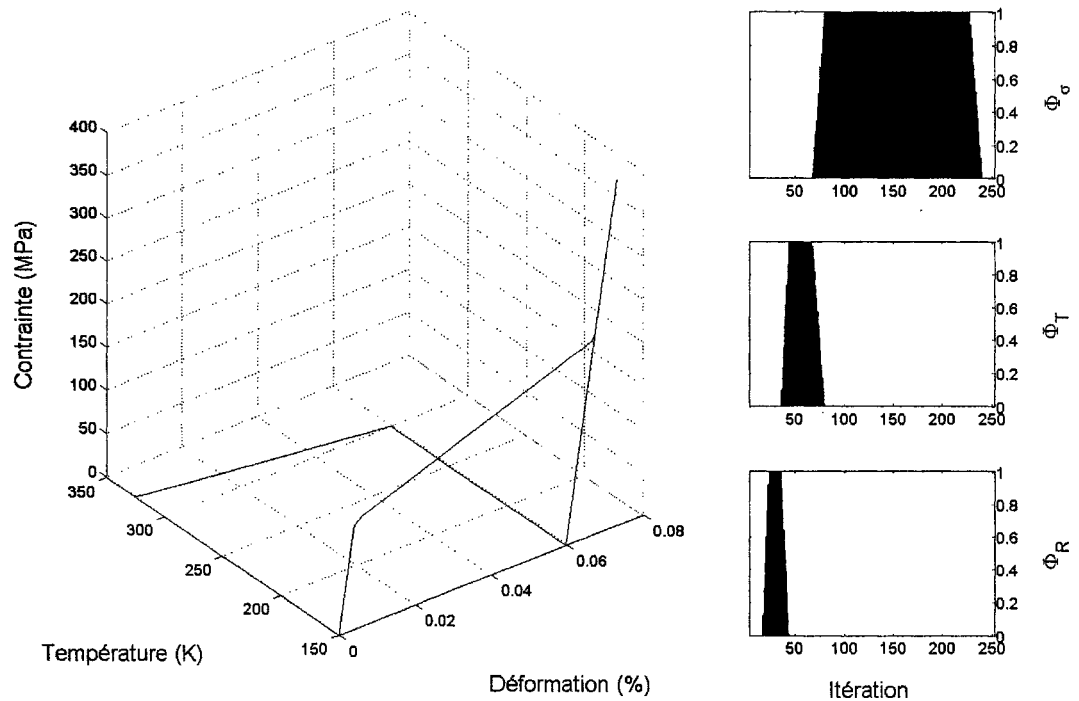


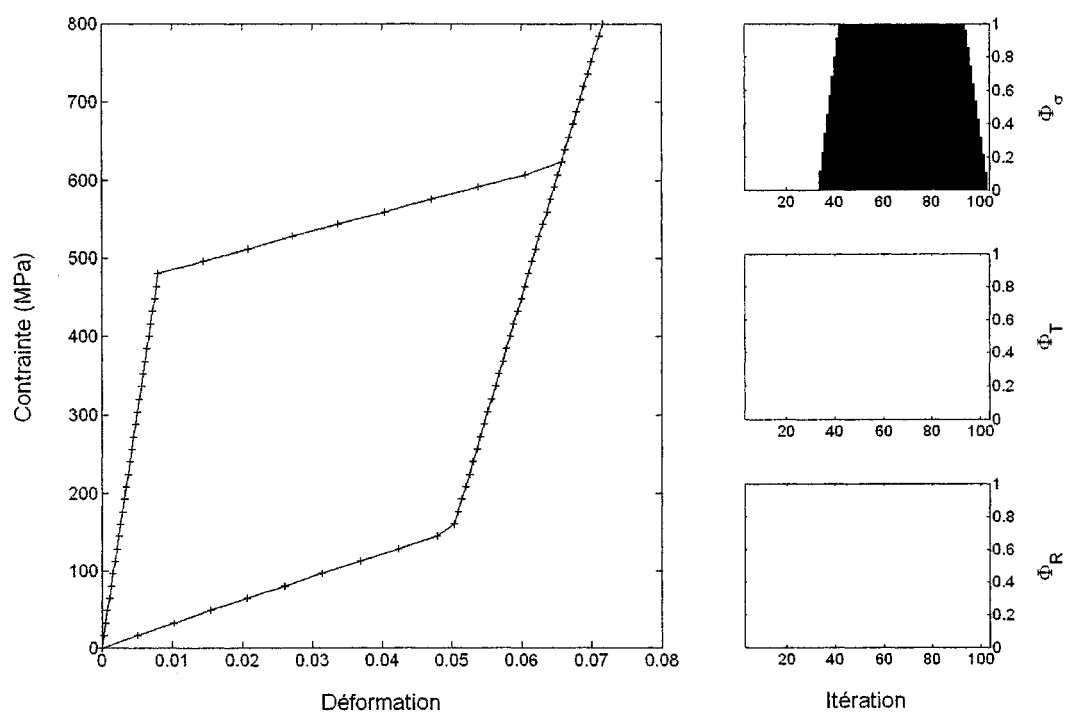
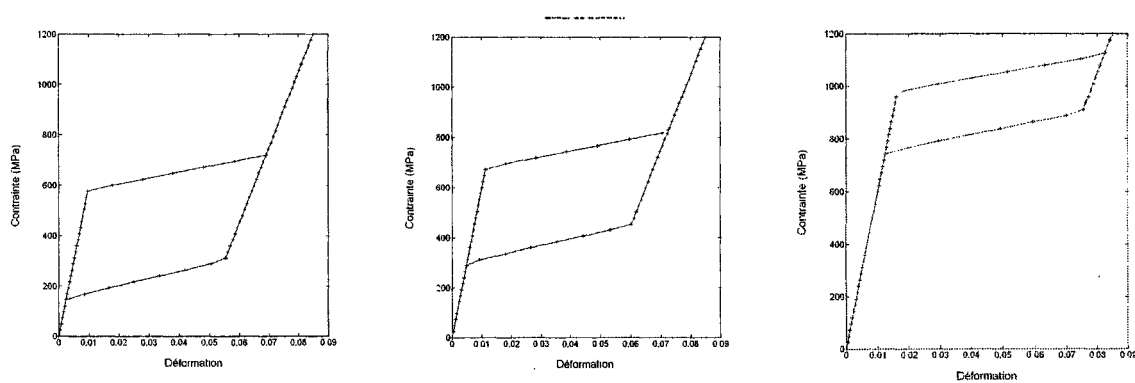
Figure 51 mémoire de forme 3D

### 3.1.2 Effet superélastique

L'effet superélastique se produit lorsque la température est égale ou supérieure à  $A_f$ . En effet, cette température est la limite critique de l'effet superélastique. En dessous de cette température, c'est l'effet mémoire de forme ou un mélange des deux qui se manifeste. Une courbe superélastique ne présente pas de déformation résiduelle et elle revient donc à l'état initial de déformation et à contrainte nulle comme à la figure 53. De plus, lorsque la température est égale à la température de fin de transformation de l'austénite, le coin inférieur gauche de l'hystérésis correspond à l'état initial comme à la figure 52.

On remarque aussi dans la figure 53 que si la température augmente, l'hystérésis s'élève vers le haut, ce qui est tout à fait logique si on se réfère au diagramme de phase. De plus, on observe que l'hystérésis diminue avec l'augmentation de température. Encore une

fois, si on se réfère au diagramme de phase, les résultats sont valables puisque les pentes des contraintes critiques de martensite sont différentes des pentes des contraintes critiques d'austénite. Finalement, la figure 54 représente un effet superélastique incomplet puisque la température est sous la température  $A_f$ . On débute donc avec 100 % austénite. Par la suite, lors de l'application de la contrainte, tout l'échantillon se transforme en martensite. Par contre, lorsque la contrainte diminue, on commence à transformer en austénite lorsque la contrainte critique  $A_s$  est atteinte. Cependant, la contrainte critique  $A_f$  est inférieure à zéro, ce qui empêche l'échantillon de retourner complètement en austénite.

Figure 52 Effet superélastique à  $T = A_f$ Figure 53 Effet superélastique à  $T = 350$  K,  $T = 375$  K et  $T = 450$  K

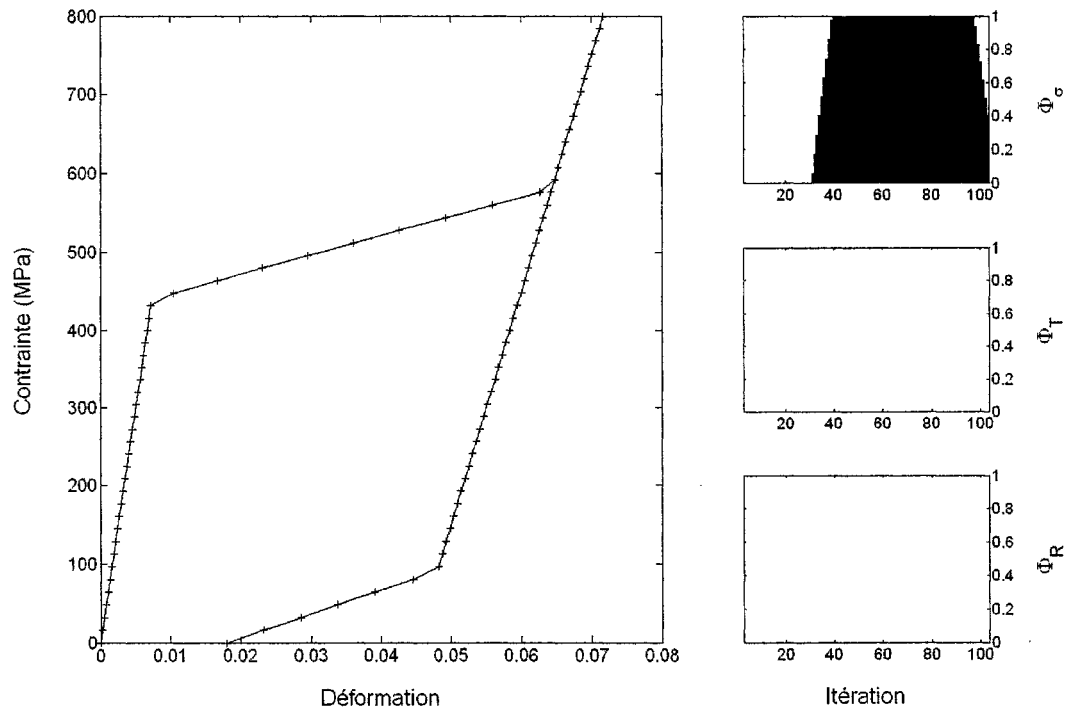


Figure 54 Effet superélastique et mémoire de forme à  $T = 315 \text{ K}$

### 3.1.3 Hystérésis de température

Jusqu'à présent, les essais effectués se résument à l'augmentation de la contrainte. Toutefois, l'augmentation de la température joue un rôle important pour les changements de phase et il est ainsi possible d'obtenir des transformations complètes en effectuant seulement une variation de la température. La figure 55 permet de bien comprendre le phénomène. En effet, on utilise un graphique 3D dans lequel on trace quelques courbes de traction isotherme. Par la suite, en variant la température à contrainte fixe, on remarque qu'il y a génération d'une hystérésis de température dont l'intersection des courbes est représentée par les points. L'hystérésis de température se produit pour toute contrainte supérieure à la contrainte critique  $M_f$  avec un balayage adéquat de la température. Cependant, dans la réalité, la droite de plasticité crée une limite de la plage d'utilisation.

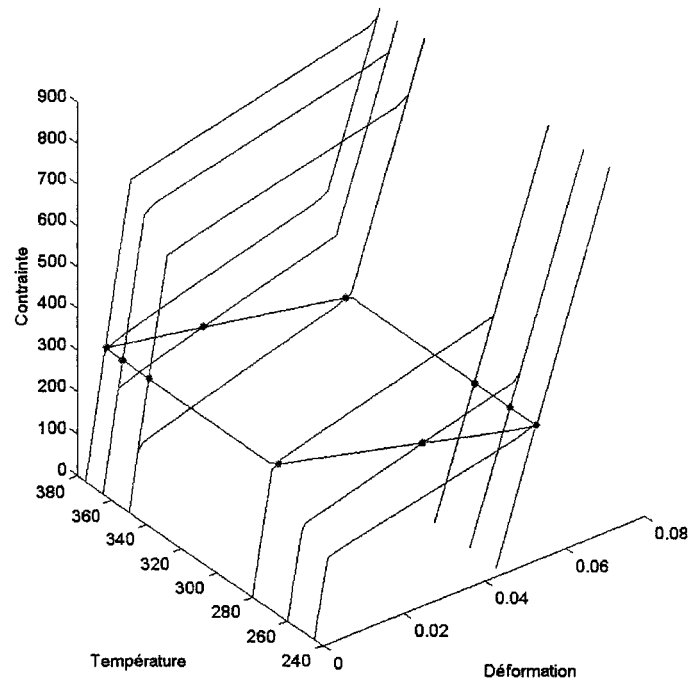


Figure 55 Hystérésis de température à contrainte = 300 MPa et essais de traction à  $T = 245, 260, 280, 350, 365$ , et  $380$  K

### 3.1.4 Sous-cycle de transformation

La figure 56 présente une courbe superélastique avec un sous-cycle de déchargement. On remarque que le sous-cycle se comporte de façon plutôt simpliste. Ce résultat est causé par la façon dont la proportion de martensite est modélisée. En effet, afin de simplifier les calculs, la cinétique de transformation a été modélisée à l'aide de droites et, par conséquent, les sous-cycles de chargement s'effectuent de la même façon. Malgré tout, puisque le modèle est inspiré de celui de Brinson, il serait fort simple d'utiliser la cinétique de transformation que cette auteure propose afin d'obtenir des sous-cycles qui se rapprochent davantage de ceux illustrés à la figure 31. Par le fait même, on améliorerait de façon significative l'allure des courbes pour des chargements complets, car la transition entre les comportements élastiques et les transformations de phase serait moins saccadée. Un point à remarquer dans cette figure concerne la pente du sous-cycle. En effet, la pente du sous-cycle n'est ni celle de la martensite, ni celle de l'austénite.



Cela correspond bien à la réalité et au modèle. En effet, à ce point de l'essai, il y a environ 50 % de martensite et 50 % d'austénite. Le module de Young doit donc se retrouver entre celui de l'austénite et celui de la martensite.

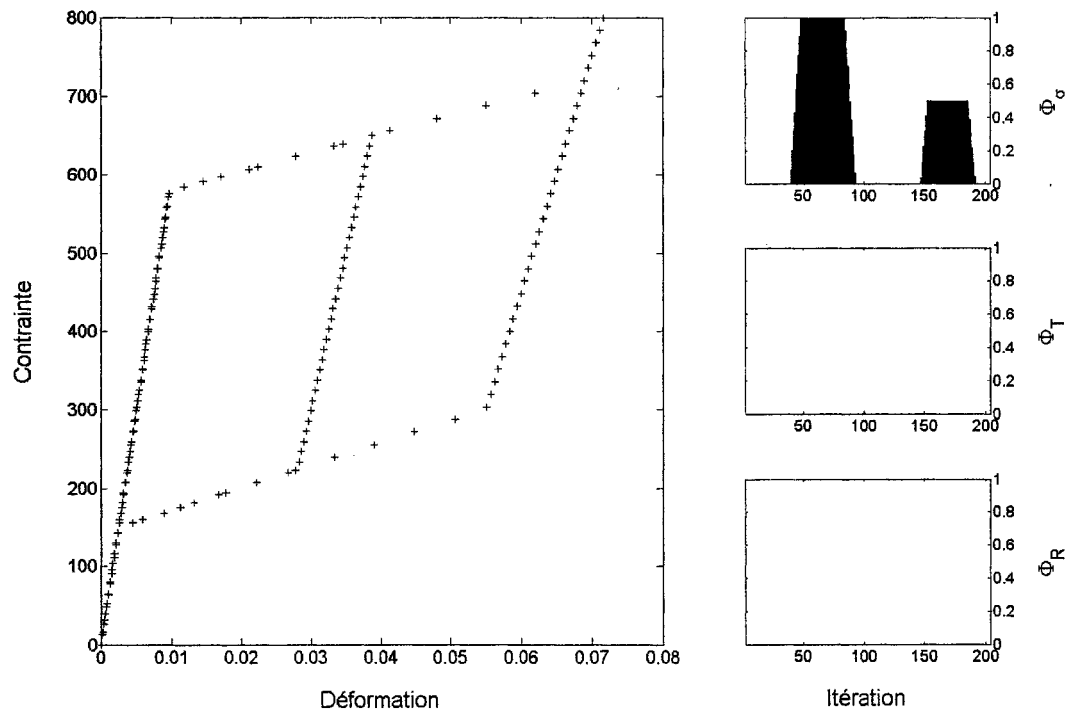


Figure 56 Sous-cycle calculé pour  $T=350$  K

### 3.1.5 Influence de la microstructure

Puisque la microstructure est à la base de ce modèle, il est important de bien connaître l'impact de cette dernière. Le nombre de grains et l'orientation de ces derniers sont les paramètres analysés dans cette section de l'étude paramétrique.

#### 3.1.5.1 Nombre de grains

Le nombre de grains est très important. En effet, un nombre insuffisant provoque une texture non désirée. Par conséquent, une étude s'impose pour connaître le nombre de

grains nécessaires qui permet une homogénéisation des grains sans augmenter le temps de calcul. Tout d'abord, les grains seront générés aléatoirement (hypothèse de matériau isotrope) et un essai de traction numérique sera par la suite effectué afin d'obtenir une transformation complète. La température utilisée sera inférieure à  $M_s$  afin d'obtenir une courbe à effet mémoire de forme. La déformation résiduelle trouvée correspond donc à la déformation de transformation. Des essais sont ainsi effectués afin de trouver la déformation résiduelle supérieure et inférieure ainsi que la moyenne. Afin d'obtenir des résultats valables, le nombre d'échantillons doit être très grand. À cet effet, 10 000 échantillons ont été créés numériquement pour un matériau possédant 1, 3, 10, 25, 50, 75, 100, 200 et 300 grains. Finalement, on trouve les résultats de cette optimisation à la figure 57 et à la figure 58

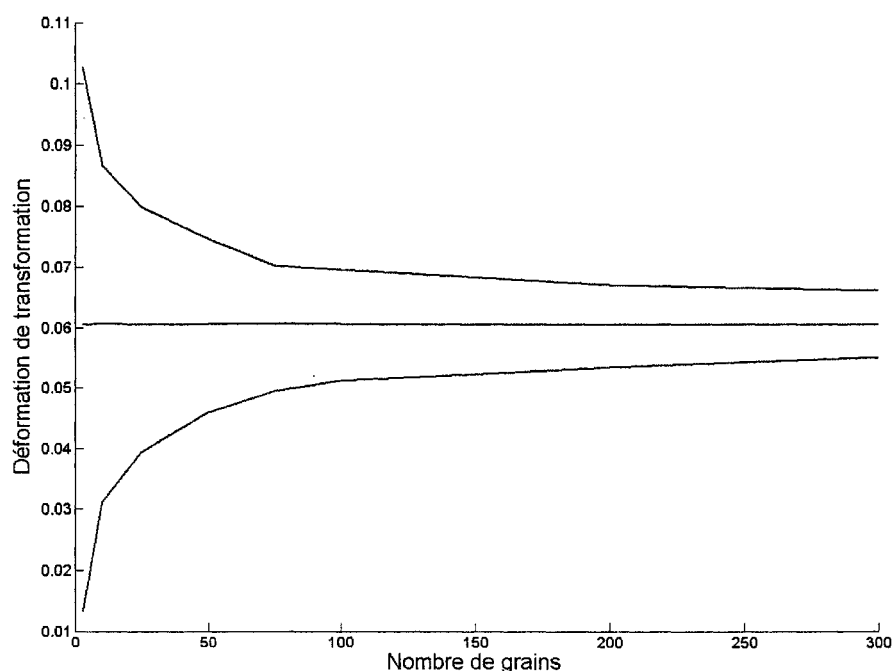


Figure 57 Déformation de transformation maximum, minimum et moyenne en fonction du nombre de grains

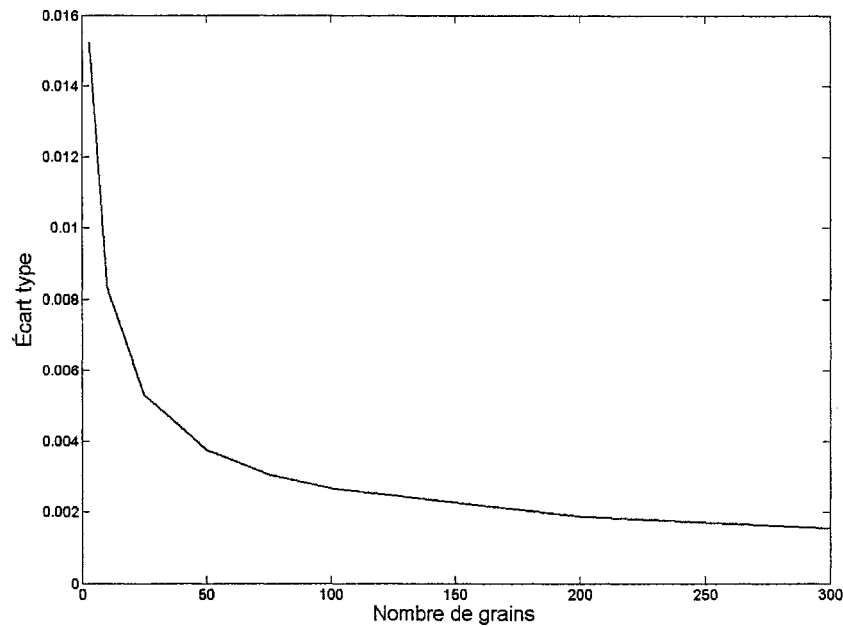


Figure 58 Écart type en fonction du nombre de grains

On sait maintenant que pour un nombre de grains supérieur à 200, l'erreur possible est très faible. En effet, pour ce nombre de grain, l'erreur possible est de  $\pm 0.7\%$  de déformation, ce qui équivaut à un écart type plutôt faible de l'ordre de 0.002. De plus, l'auteur Nyards [71] obtient les mêmes résultats à partir d'une étude par éléments finis effectuée sur différents matériaux. Cependant, il y a toujours une erreur possible. Il est donc suggéré de toujours utiliser la même matrice d'orientation de grains. Cette technique est simple et efficace car elle permet une reproductibilité sans faille.

### 3.1.5.2 Textures

On connaît maintenant le nombre minimum de grains nécessaire pour créer un matériau isotrope. Par contre, il est possible de créer des textures en orientant les grains dans une direction prédéterminée. Afin de voir l'impact de l'orientation, cinq essais de traction numérique sont réalisés. Les matériaux sont modélisés à partir de 200 grains. Une partie

des grains est alignée dans l'axe de la contrainte répartie aléatoirement dans un cône ayant un angle de 10 degrés comme à la figure 59, tandis que les grains restants sont orientés aléatoirement.

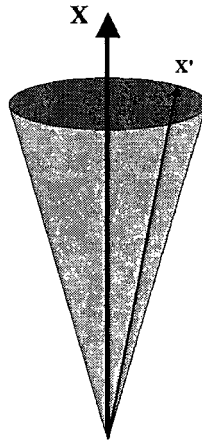


Figure 59 Représentation de la texture à l'aide du référentiel global et local

Les résultats sont représentés à la figure 60. On remarque que plus le nombre de grains alignés est important, plus le matériau obtient de grandes déformations de transformation. Finalement, la déformation la plus grande tend vers celle d'un monocristal orienté dans le sens de la contrainte, c'est-à-dire vers une déformation de transformation de l'ordre de 10.45 %. Il aurait aussi été possible de créer le phénomène inverse en orientant une partie des grains dans la pire direction. Les résultats ainsi obtenus auraient été les mêmes sauf que plutôt que d'augmenter la déformation, elle aurait diminué. La texture permet donc de contrôler la déformation maximale résiduelle.

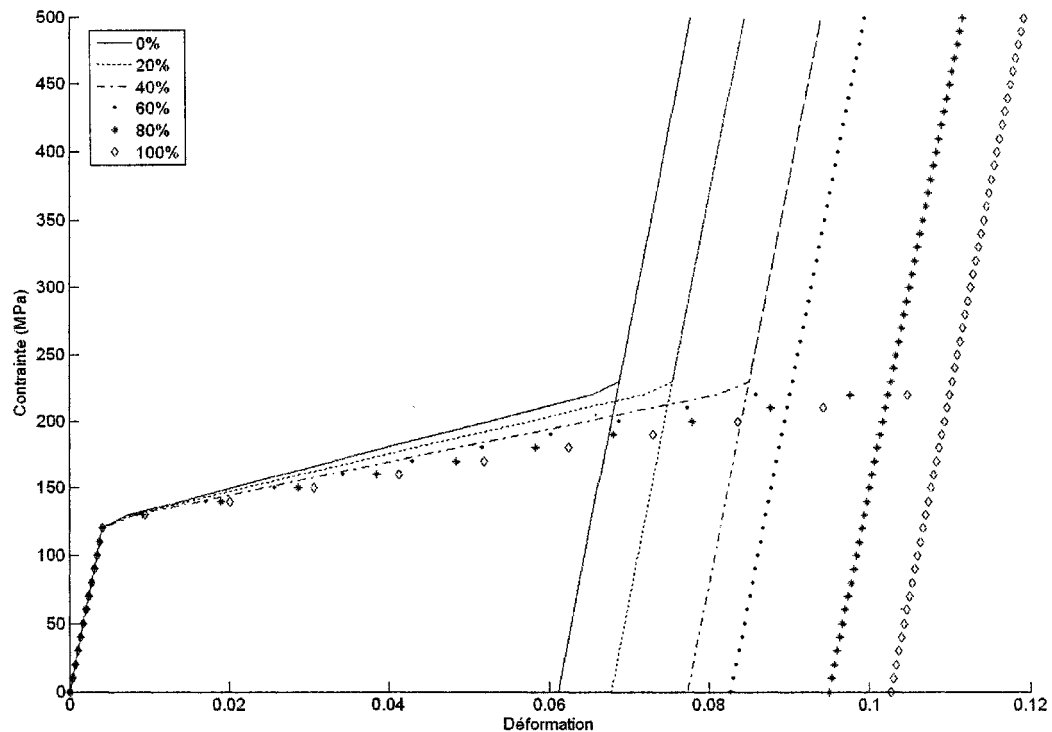


Figure 60 Effet de la texture en fonction de l'orientation

### 3.1.6 Influence du coefficient de Poisson

La plupart des auteurs proposent des coefficients de Poisson de 0.3. Par contre, Spinner et Rozner [72] proposent des coefficients de Poisson entre 0.22 et 0.485 selon la préparation et le traitement thermique effectués sur l'échantillon. Cependant, la valeur utilisée pour ce modèle est peu importante puisqu'elle n'a aucune conséquence majeure sur le modèle. En effet, puisque le modèle se limite à une analyse 1D, la déformation latérale n'est pas analysée et peut donc prendre n'importe quelle valeur. Par souci de transparence, les coefficients de Poisson de la martensite et de l'austénite seront donc fixés à 0.33.

### 3.2 Test sur le modèle thermique

Les variables du modèle de transfert de chaleur sont analysées à partir de la simulation suivante. Tout d'abord, on refroidit l'échantillon à 150 K, soit plus froid que  $M_f$ . On applique par la suite une contrainte supérieure à la contrainte critique  $\sigma_{mf}$ , dans le cas présent 300 MPa. Finalement, on applique un courant de quatre ampères pendant cinq secondes pour le chauffage et on refroidit en coupant le courant pendant cinq secondes. Le test est répété à plusieurs reprises en changeant la variable étudiée.

#### 3.2.1 Température du fil d'AMF

La figure 61 présente la température du fil lors d'un test. Le profil est caractérisé par des changements de pente qui sont dus à la génération ou à l'absorption de chaleur lors du changement de phase. Les points de changement de pente correspondent d'ailleurs aux températures de transformation, soit  $A_s$  et  $A_f$  au chauffage et  $M_s$  et  $M_f$  au refroidissement. En effet, si on calcule les températures de transformation à l'aide du diagramme de phase pour une contrainte de 300 MPa, on obtient les valeurs du tableau VI. En utilisant ces valeurs ainsi que les résultats obtenus, on voit immédiatement que tous concordent. Le profil de cette courbe correspond d'ailleurs aux résultats obtenus par plusieurs auteurs qui traitent de ce sujet [69; 73-75].

Tableau VI

Température de transformation du matériau  
pour une contrainte de 300 MPa

Propriété	Valeur
$T_{A_s}$ (K°)	350
$T_{A_r}$ (K°)	375
$T_{M_s}$ (K°)	280
$T_{M_f}$ (K°)	245

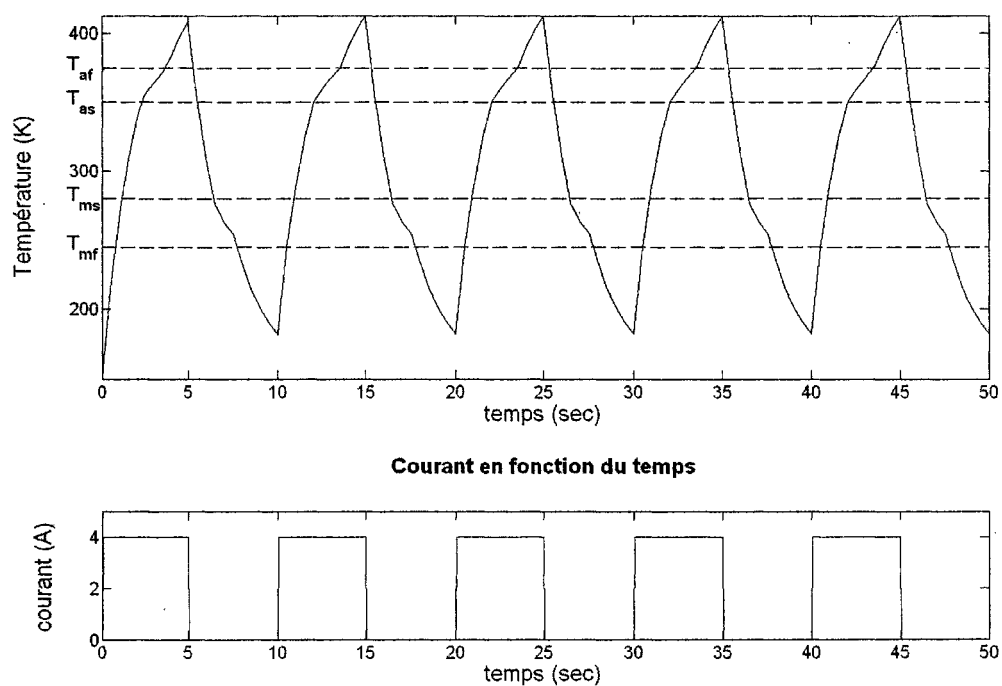


Figure 61 Température de l'échantillon en fonction du temps

### 3.2.2 Influence de la résistance thermique

Afin de vérifier l'impact de la résistance thermique, on effectue le même test, c'est-à-dire avec une charge de 300 MPa et un courant de 4 ampères mais on fait varier la résistance thermique. Comme le montre la figure 62, plus la résistance thermique est faible, plus la température de l'échantillon est difficile à élever. Dans un circuit électrique, la résistance limite le passage du courant. Il est donc possible d'affirmer, par analogie, que la résistance thermique limite le passage de la chaleur. Cette dernière est donc emprisonnée à l'intérieur de l'échantillon et augmente par le fait même la température de celui-ci. Puisqu'elle est intimement liée à la température, la déformation dépend aussi de la résistance thermique. La figure 63 présente la déformation dans le temps de l'essai et on remarque que plus la résistance est élevée, plus la déformation est précipitée. En effet, puisque la température de l'échantillon s'élève rapidement, le changement de phase se fait donc aussi rapidement, ce qui influence directement la déformation. On peut donc conclure que pour un chauffage rapide de l'échantillon, il faut une résistance thermique élevée tandis que pour obtenir un refroidissement rapide, il faut une résistance thermique faible.



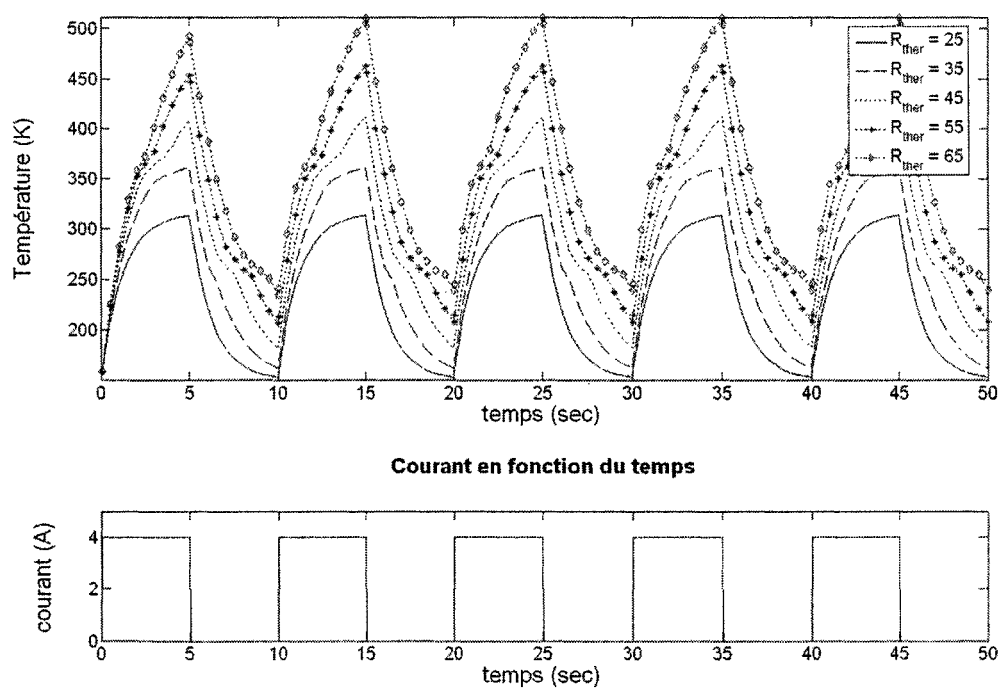


Figure 62 Température en fonction du temps pour différentes valeurs de résistance thermique

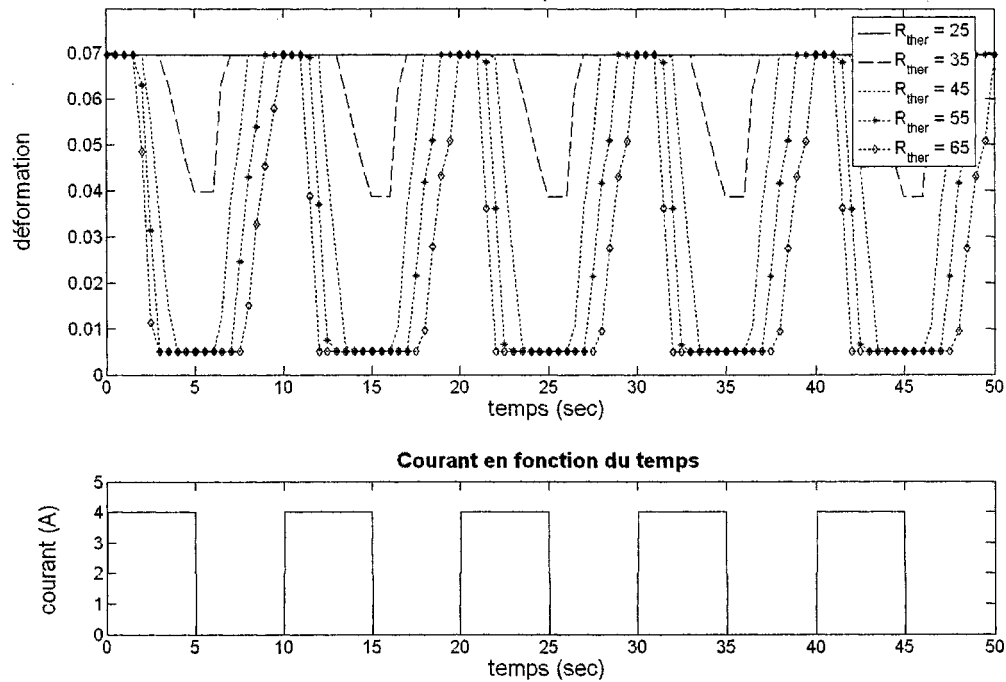


Figure 63 Déformation en fonction du temps pour différentes valeurs de résistance thermique

### 3.2.3 Influence de la chaleur spécifique

Rappelons tout d'abord que la chaleur spécifique d'un corps correspond à la quantité d'énergie nécessaire à l'élévation de 1 °C de la température d'un gramme de matière. Par définition, la chaleur spécifique peut se calculer soit à volume constant, soit à pression constante. Par contre, les valeurs ne seront pas les mêmes. Il faut donc être vigilant. Le cas analysé dans ce rapport ne nécessite que la chaleur spécifique à pression constante, c'est-à-dire  $C_p$ . Çengel [33] propose l'équation suivante :

$$C_p = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta T} = \frac{\partial h}{\partial T} \quad (3.1)$$

où  $T$  représente la température et  $h$ , l'enthalpie.

En effectuant les simulations, on remarque que plus  $C_p$  est faible, plus la température augmente et diminue rapidement. Cela semble logique puisqu'il faut moins d'énergie pour augmenter de  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$  la température de l'échantillon. De plus, en observant l'effet sur la déformation, on remarque un déphasage de cette dernière. Celui-ci est causé par le fait que plus la température augmente rapidement, plus le changement de phase débute tôt. Au refroidissement, on observe le même phénomène et donc la déformation se termine aussi plus rapidement.

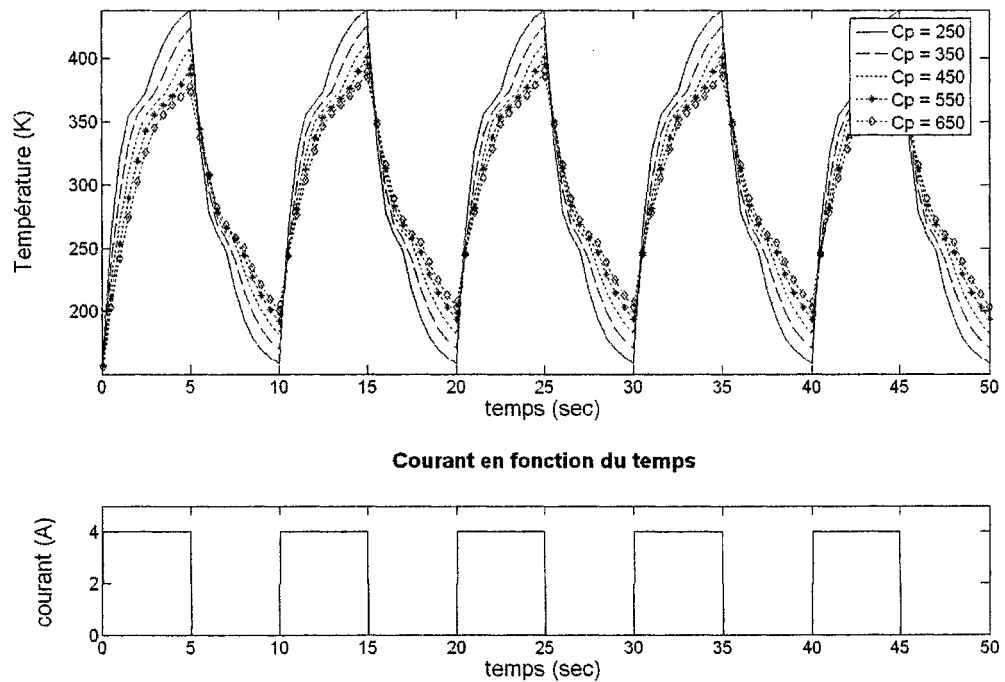


Figure 64 Température en fonction du temps pour différentes valeurs de chaleur spécifique

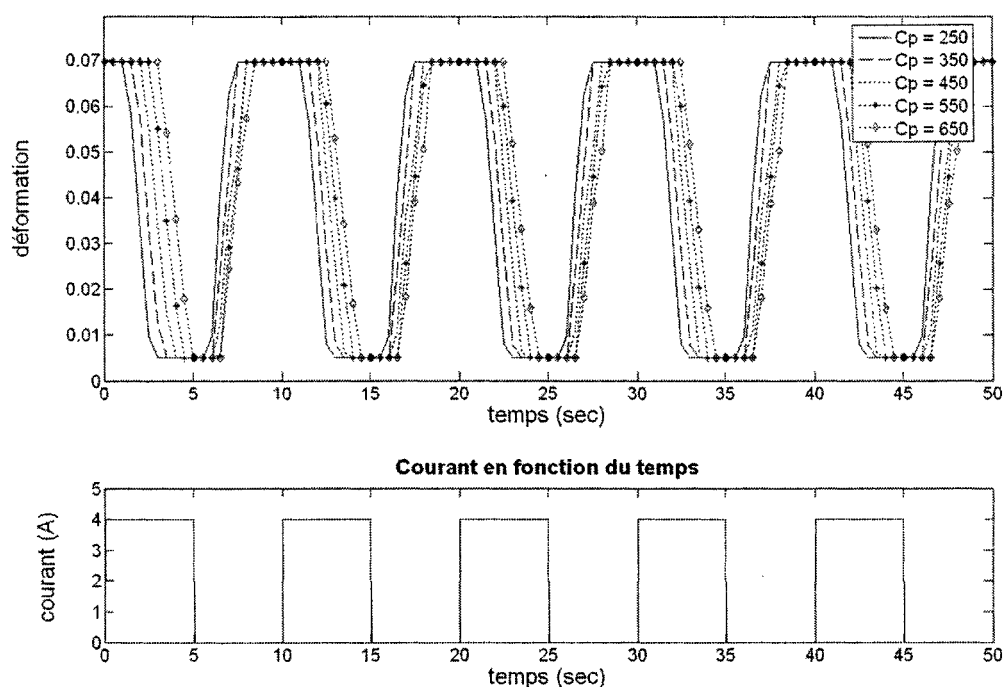


Figure 65 Déformation en fonction du temps pour différentes valeurs de chaleur spécifique

### 3.2.4 Influence de la chaleur latente

Comme pour la résistance thermique, on effectue le même test, sauf que l'on fait varier la chaleur latente. Cette dernière correspond à l'énergie absorbée ou restituée lors du changement de phase. À la figure 66, on remarque très bien le phénomène. En effet, plus la chaleur latente est élevée, plus le changement de pente est abrupt, ce qui est tout à fait logique puisque l'échantillon absorbe plus d'énergie, ce qui l'empêche d'augmenter sa température. Cependant, la figure 67 propose que l'énergie latente a un effet relativement faible sur la déformation. La transformation est toujours complète, mais on remarque qu'elle a tendance à s'effectuer moins rapidement du fait que l'énergie est absorbée par le matériau plutôt qu'utilisée pour augmenter sa température. À noter que le même phénomène se produit lors du refroidissement, sauf que le matériau génère de la chaleur.

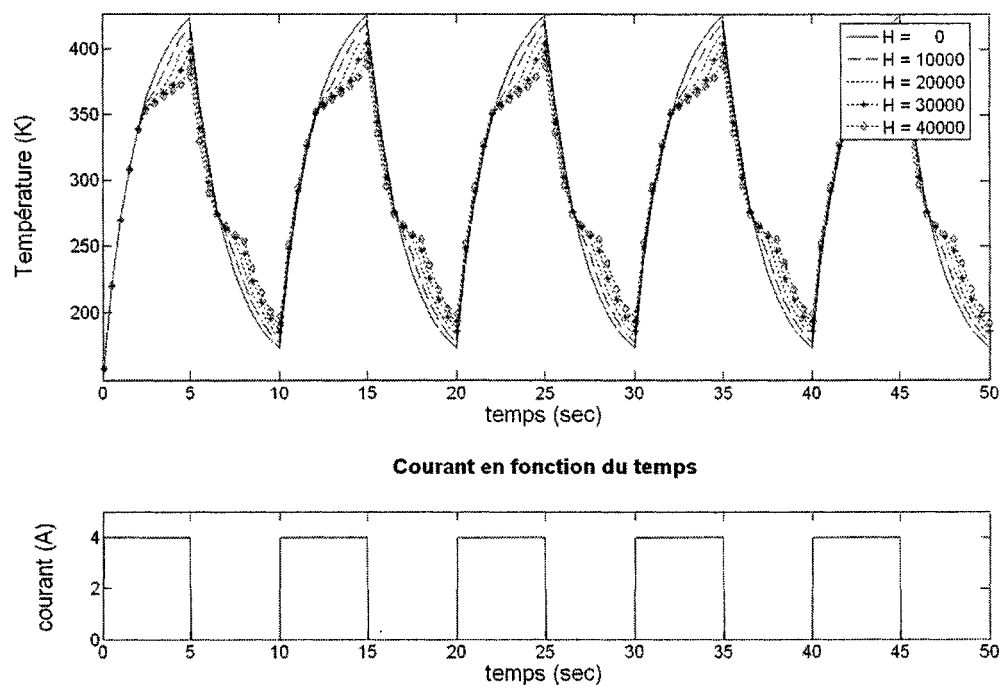


Figure 66 Température en fonction du temps pour différentes valeurs d'énergie latente

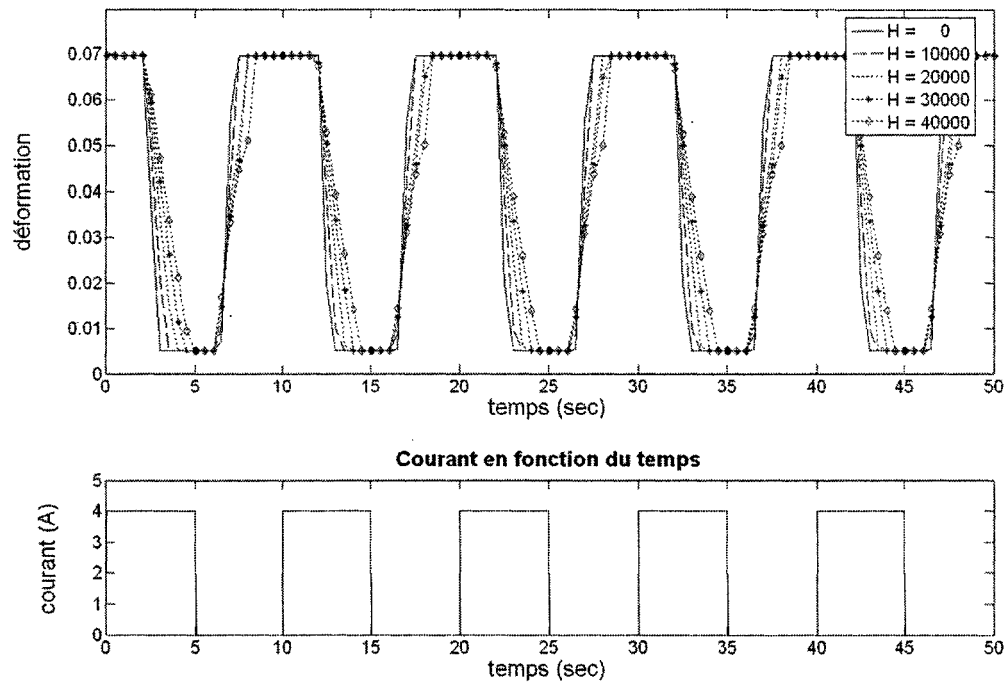


Figure 67 Déformation en fonction du temps pour différentes valeurs d'énergie latente

### 3.2.5 Influence de la température ambiante

La figure 68 et la figure 69 présentent la température de l'échantillon ainsi que sa déformation pour différentes valeurs de température ambiante. Encore une fois, avec l'analogie électrique, il est facile d'interpréter les résultats. En effet, pour une résistance électrique donnée, la seule façon de faire passer plus de courant est d'augmenter la différence de potentiel aux bornes de cette dernière. Le courant correspond à la chaleur évacuée tandis que la différence de potentiel correspond à la différence de température entre l'échantillon et la température ambiante. Donc, plus la différence de température est élevée, plus la chaleur évacuée par l'échantillon est importante et moins vite sa température augmente. Cette variable est donc importante puisqu'elle est facile à contrôler et elle a un impact considérable sur le comportement de l'AMF. On remarque que si la température ambiante est trop froide le courant donné n'est pas suffisant pour élever la température de l'échantillon. À l'opposé, si la température ambiante est trop

chaude, le refroidissement de l'échantillon est plus difficile. Il y a donc pour une résistivité, une chaleur spécifique, une chaleur latente ainsi qu'un courant donné une température ambiante optimale. Dans le cas présent, la température ambiante optimale est de 125 K puisqu'à cette température ambiante le courant est suffisamment élevé pour permettre la transformation de la martensite mais suffisamment basse pour accélérer le refroidissement de l'échantillon.

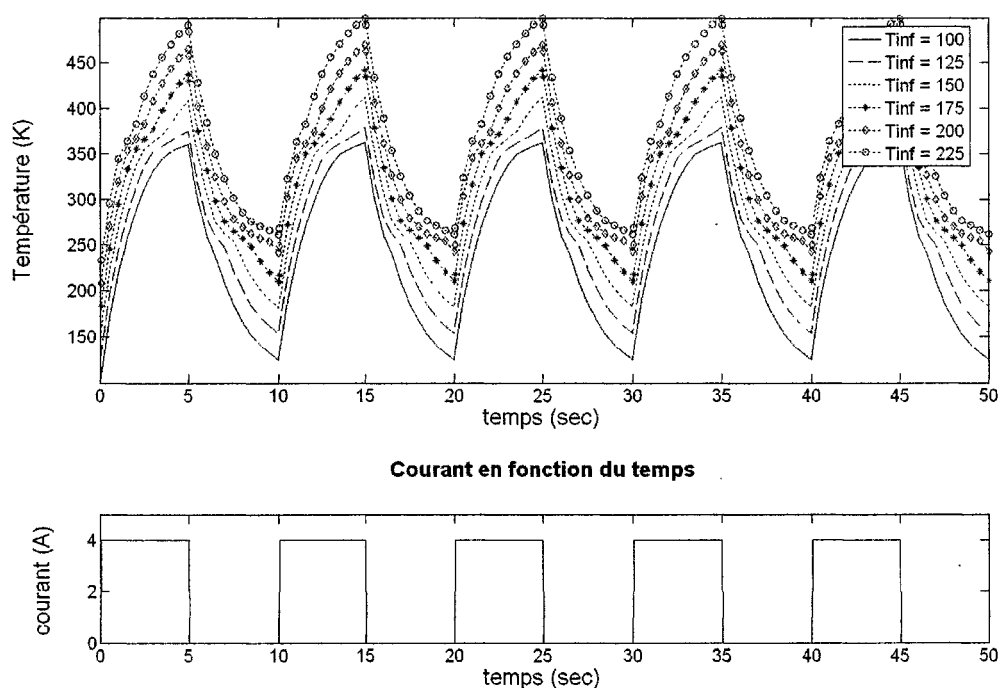


Figure 68 Température en fonction du temps pour différentes valeurs de température ambiante

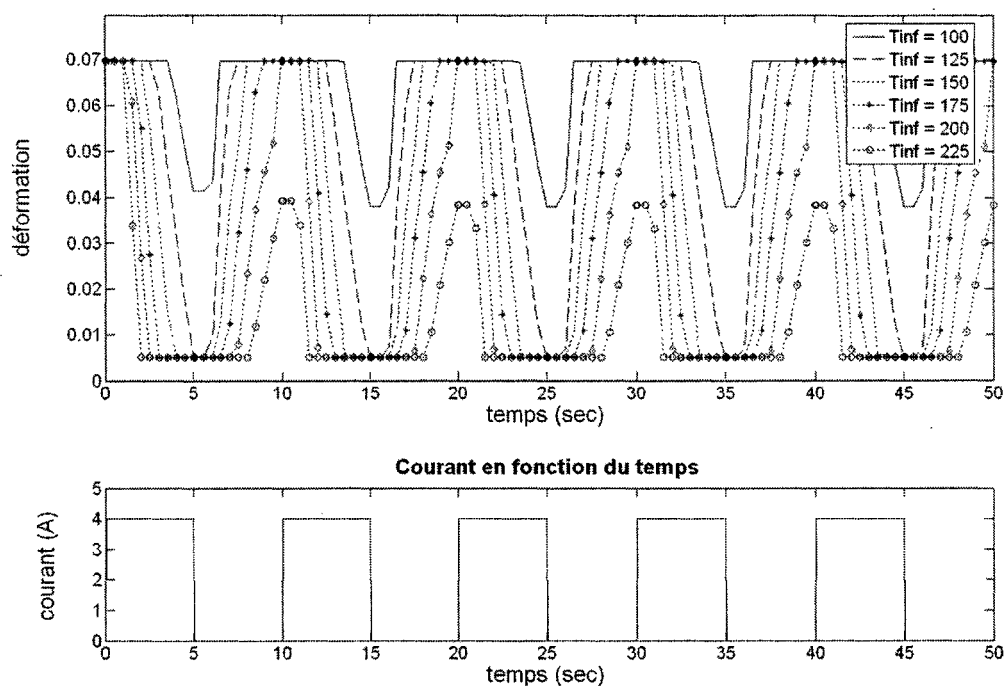


Figure 69 Déformation en fonction du temps pour différentes valeurs de température ambiante

### 3.2.6 Influence du diamètre du fil

L'influence de la variation du diamètre du fil a une incidence sur la résistance thermique et électrique. Selon Incropera [70], la résistance thermique se calcule selon les équations suivantes :



$$\begin{aligned}
 Re &= \frac{Vd}{\nu} \\
 Nu &= 0.3 + \frac{0.62 Re^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0.4}{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} \\
 h &= \frac{k Nu}{d} \\
 R_{ther} &= \frac{1}{h A}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

où Re est le nombre de Reynolds, V la vitesse de l'écoulement, d le diamètre du fil,  $\nu$  la viscosité, Nu le nombre de Nusselt, Pr le nombre de Prandtl, k la conductivité de l'air, h le coefficient de convection et  $R_{ther}$  la résistance thermique. En utilisant les propriétés de l'air du même auteur et en supposant une vitesse d'écoulement constante de 2 m/s, on trouve facilement la valeur de la résistance thermique pour différent diamètre de fil comme à la figure 70.

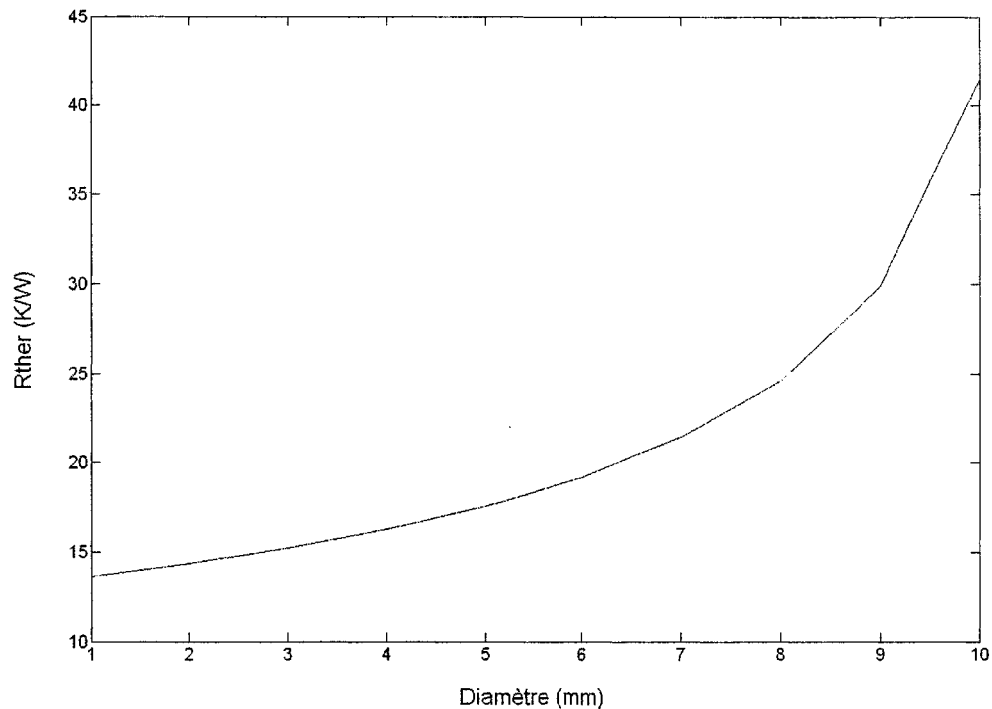


Figure 70 Valeur de la résistance thermique en fonction du diamètre du fil

La résistance électrique se calcule aussi très facilement avec l'équation suivante :

$$R_{elec} = \frac{\rho_{elec} L}{A} \quad (3.3)$$

où R correspond à la résistance électrique,  $\rho$  à la résistivité, L la longueur et A l'aire transversale du fil. On obtient de cette façon les résultats présentés à la figure 71. On remarque immédiatement que la variation du diamètre du fil a une conséquence majeure sur le comportement de l'AMF. En effet, la diminution du diamètre du fil fait augmenter la résistance électrique de ce dernier. La quantité de chaleur pour un courant donné est donc plus importante. De plus, la résistance thermique augmente aussi, ce qui, encore

une fois, augmente la température du fil. Le fil est donc plus facile à chauffer, mais il se refroidit aussi plus rapidement.

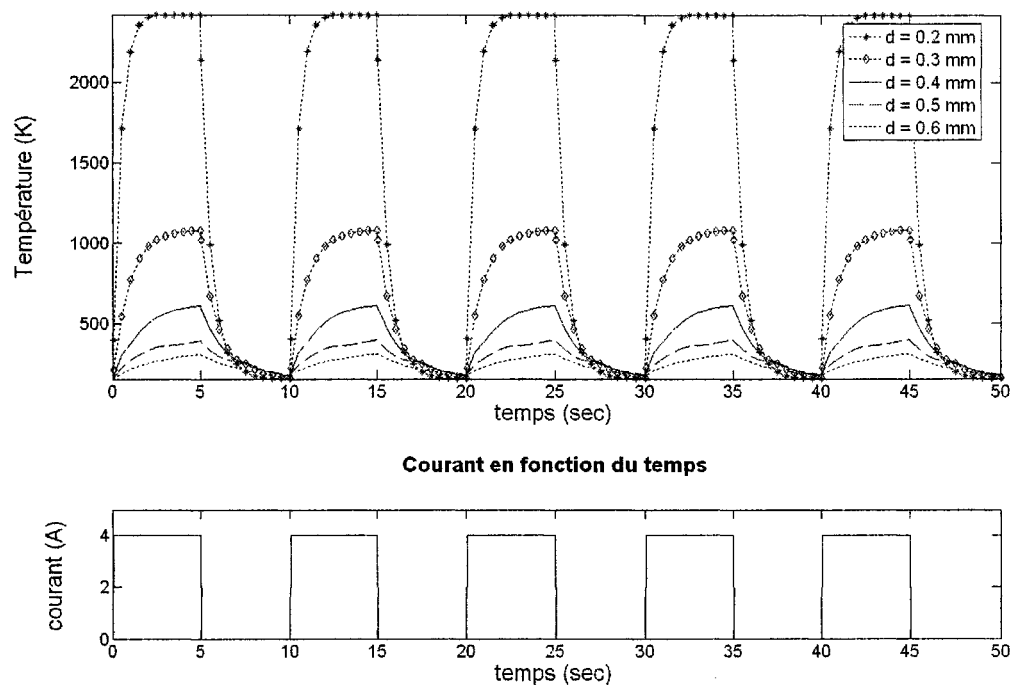


Figure 71 Température en fonction du temps pour différentes valeurs de diamètre

## CHAPITRE 4

### CARACTÉRISATION DU MATÉRIAU ET MÉTHODOLOGIE

Cette section permet d'obtenir les données nécessaires à la modélisation. Elle permet de recueillir toutes les propriétés d'un échantillon d'AMF. De plus, les résultats obtenus pourront être réutilisés pour la validation du modèle.

#### 4.1 Échantillon

L'échantillon utilisé est fourni par la compagnie SPECIAL METAL, un leader mondial œuvrant dans la fabrication de matériaux depuis plus de 100 ans [76]. L'alliage utilisé est un nitinol ayant la composition chimique suivante :

Tableau VII

Composition de l'alliage de nitinol utilisé

Élément	% massique
Nickel	55.91
Titane	44.06
Oxygène	0.05 max
Carbone	0.05 max
Mn, Si, Cr, Co, Mo, W, V	<0.01
Nb, Al, Zr, P, Cu, Ta, Hf	<0.01
Zn, Sb, Sr, Na, As, Be, Ba	<0.01
Fe	<0.05
B	<0.001

L'échantillon employé est un fil de 0.5 mm (0.020 pouce) de diamètre. Cependant, le fil n'a subi aucun traitement thermique après son tréfilage. Il possède donc un pourcentage de déformation à froid de 40 % (cold work). De plus, le certificat de test fourni par la compagnie atteste une température de transformation de  $A_f$  à près de 4 °C. Toutefois, cette valeur a été obtenue sur un échantillon complètement recuit (fully annealed).

## **4.2 Traitement thermique**

La sélection d'un traitement thermique adéquat, communément appelé recuit ou revenu, constitue un défi en soi. En effet, les propriétés mécaniques d'un AMF dépendent de la combinaison du taux de déformation à froid et du traitement thermique, qui dépend à son tour de la température et du temps de recuit [77]. Cependant, l'amélioration d'une propriété quelconque est souvent obtenue au détriment d'une autre. Par exemple, l'augmentation de la dureté ne peut être envisagée sans augmenter la fragilité. Le contrôle du traitement thermique est donc très important pour la reproductibilité des propriétés mécaniques ainsi que des températures de transformation des échantillons [77]. Il n'y a donc pas de recette miracle pour choisir le traitement adéquat. Il faut effectuer quelques traitements, les analyser et voir si cela convient. De plus, il n'existe pas de relation entre le traitement appliqué et les températures de transformation, c'est-à-dire qu'il ne suffit pas d'augmenter le temps et la température pour diminuer les températures de transformation. En effet, en observant les résultats de Cadier [76] à la figure 72, on remarque qu'il n'y a aucune relation facilement quantifiable.

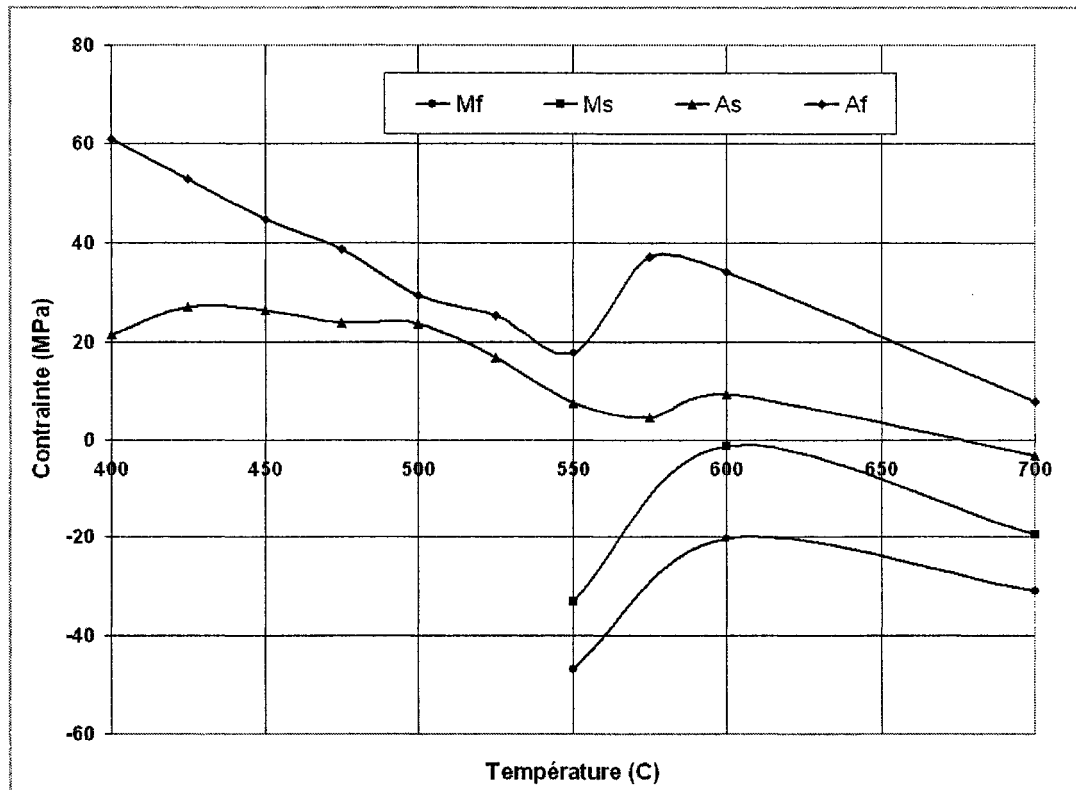


Figure 72 Variation des températures de transformation en fonction de la température du traitement thermique d'une durée de une heure [76]

Pour l'échantillon utilisé dans ce projet, un traitement thermique de 500 °C pendant une heure a été retenu puisque ce dernier permet d'obtenir les températures de changement de phase de l'austénite à température pièce. On pourra ainsi obtenir des courbes superélastiques et à mémoire de forme sans avoir à chauffer ou à refroidir excessivement.

#### 4.3 Stabilisation et fatigue de l'échantillon

Selon l'Office québécoise de la langue française [78], la fatigue est un phénomène de rupture par fissuration progressive d'un matériau, sous l'effet d'efforts cycliques répétés, au-dessus d'une certaine valeur critique. Bref, c'est la tendance d'un matériau à se briser

sous des conditions d'efforts cycliques répétés bien inférieurs à la contrainte ultime. Les contraintes périodiques mécaniques ou thermiques induisent des dislocations dans le matériau. Il y a alors durcissement du matériau, création de fissures et propagation de fissures jusqu'à la rupture. Cependant, le phénomène de fatigue est beaucoup plus complexe pour les alliages à mémoire de forme. En effet, puisque l'état microstructural de l'AMF change, ce dernier voit ses propriétés se modifier. On remarque par exemple un changement des températures de transformation ainsi qu'une diminution de l'énergie de transformation. Toutefois, il est possible d'utiliser la formation des dislocations pour générer l'effet mémoire double sens.

Miyazaki [79] démontre bien le phénomène de fatigue avec une série de courbes représentées à la figure 73. De plus, les AMF ne résistent pas bien aux cycles répétés. En effet, leur durée de vie est de seulement  $10^3$  à  $10^5$  cycles, dépendamment du traitement thermique et des amplitudes de sollicitation [78], comparativement aux aciers qui peuvent avoir des durées de vie de l'ordre de  $10^8$  cycles à l'infini, si les contraintes appliquées sont faibles [58].

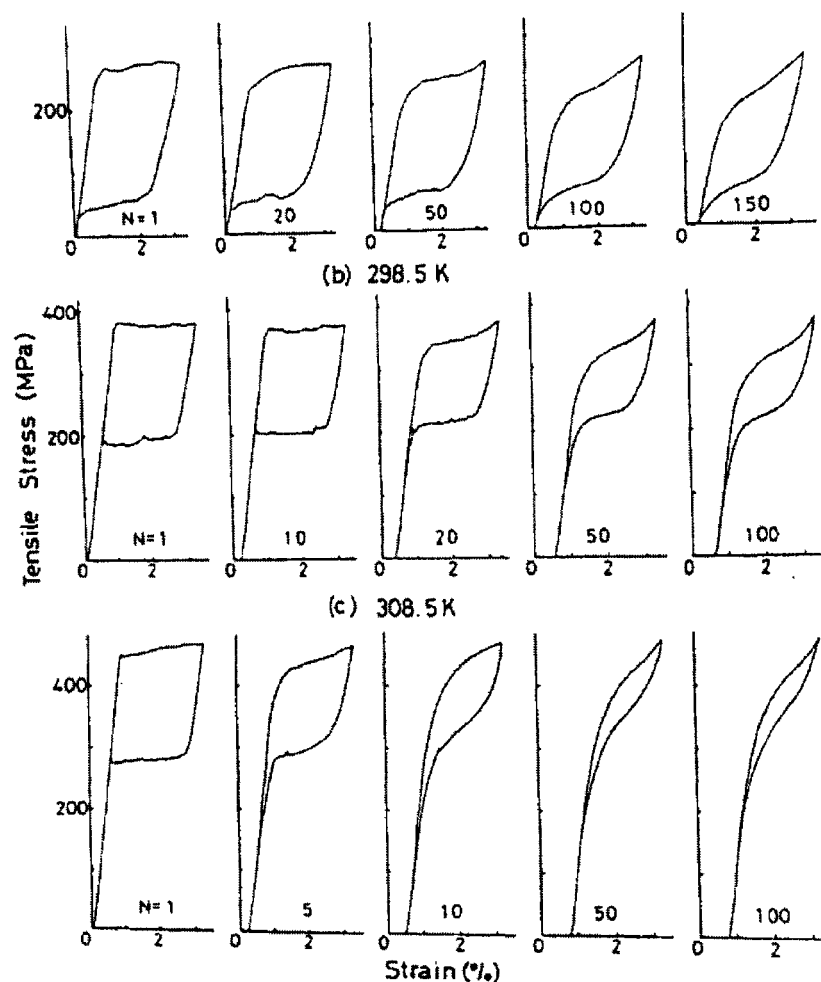


Figure 73 Essai de traction pour différentes températures et différents nombres de cycles

Il est à noter que selon la figure 73, les premiers cycles évoluent plus rapidement que les cycles subséquents. En conséquence, on remarque une stabilisation du phénomène de dégradation. Piedboeuf [78] propose donc un précyclage minimum de 100 cycles et à partir de ce moment, il est possible d'émettre l'hypothèse que l'alliage est stable. Il y a plusieurs façons de cycler un AMF. On peut tout simplement faire varier la contrainte à température fixe ou faire varier la température à contrainte fixe. Bref, tout chargement qui force un changement de phase peut permettre une stabilisation du comportement de l'AMF.



#### **4.4 Essais mécaniques**

Comme décrit précédemment, les échantillons doivent être cyclés à l'avance. À l'aide d'une machine de traction ELF3200 de la compagnie Enduratech et de son enceinte thermique, les échantillons ont été cyclés 100 fois comme le suggère Piedboeuf. Tout d'abord, le fil est fixé dans les mâchoires de la machine afin d'obtenir un échantillon dont la longueur utile est 70 mm. Par la suite, la température de l'enceinte thermique est élevée à 35 °C afin d'obtenir des courbes superélastiques. On cycle alors le matériau à une vitesse de 0.5 mm/sec sur une distance de 3.6 mm, ce qui équivaut à une déformation de départ d'environ 5 %. Finalement, on teste l'échantillon pour différentes températures à une vitesse de 0.25 mm/sec en augmentant progressivement la charge afin d'obtenir un changement de phase complet.

##### **4.4.1 Diagramme de phase et module Young**

Une fois les résultats analysés et traités, des courbes de déformation-contrainte comme celle de la figure 74 sont obtenues. Comme expliqué auparavant, les changements de pente sont dus aux changements de phase. En utilisant deux droites et en idéalisant le processus, il est possible de trouver la contrainte critique  $\sigma_{Ms}$  à laquelle la transformation débute pour une température donnée. En effet, en passant les droites sur la moyenne des résultats, l'intersection de ces deux dernières est la contrainte critique.

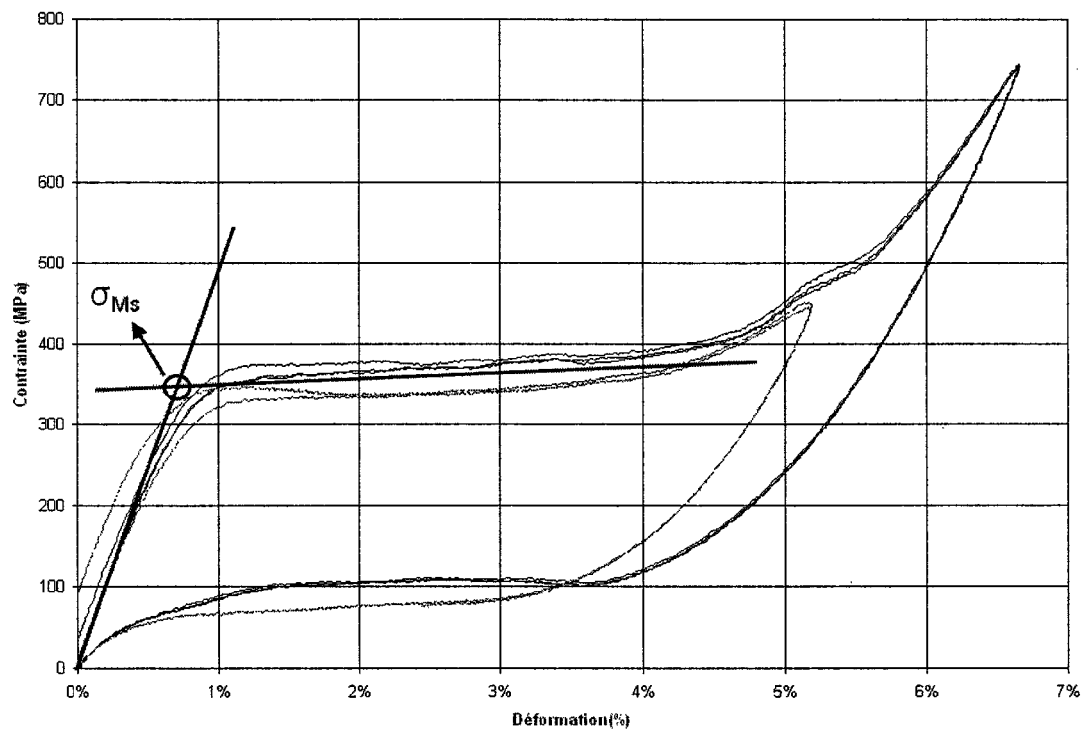


Figure 74 Essais de traction à une température de 35°C

Cette analyse est effectuée pour les quatre contraintes critiques (quatre coins de l'hystérésis) et pour différentes températures. Lorsque la courbe représente un AMF dans son domaine d'effet mémoire de forme, on ne retrouve alors que les deux coins supérieurs de l'hystérésis, c'est-à-dire  $M_f$  et  $M_s$ . Si le nombre d'essais est élevé et que la plage de température est suffisamment couverte, un graphique comme celui de la figure 75 peut être réalisé. Ce dernier représente le diagramme de phase du matériau étudié.

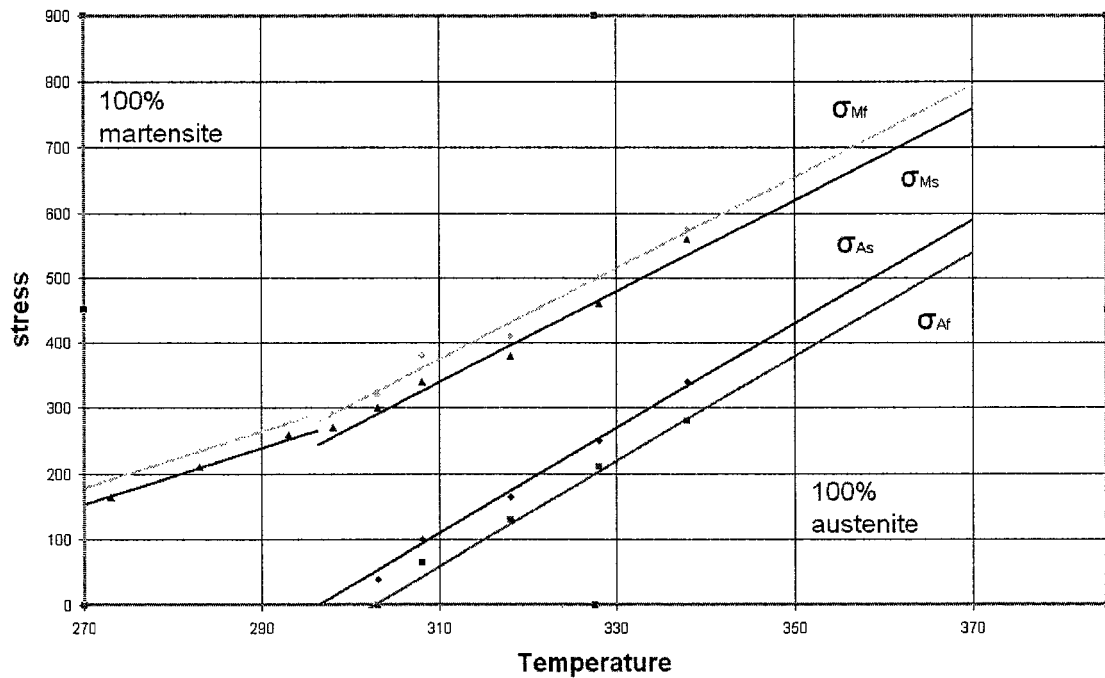


Figure 75 Diagramme de phase réalisé après analyse des résultats

On peut ainsi valider le fait que les températures de transformation varient linéairement en fonction de la contrainte. Par contre, on remarque une légère inflexion dans les droites  $M_f$  et  $M_s$ . Cette inflexion est due à un autre changement de phase, la phase R. L'intersection des droites avec l'abscisse du graphique correspond aux températures  $A_s$  et  $A_f$ . Pour les températures  $M_f$  et  $M_s$ , il est plus difficile de les évaluer. En effet, ces températures pour le matériau étudié sont plus petites que  $-60\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Les appareils utilisés pour la caractérisation ne sont pas conçus pour aller à de si basses températures. Par contre, il n'est pas nécessaire de les connaître pour le modèle si on se limite à la plage de température étudiée. En effet, le modèle utilise le diagramme de phase pour calculer la proportion de martensite et non pas les températures de transformation.

Finalement, à l'aide d'un essai de traction isotherme, il est très simple de calculer les modules de Young de la martensite et de l'austénite. Il suffit de mesurer la première

pour connaître le module de l'austénite et la deuxième pour connaître celui de la martensite. À noter que le module de Young de l'austénite est différent pour la figure 76 et la figure 77. En effet, on observe dans le premier graphique un module de Young de 60 GPa, tandis que celui du second graphique est de 30 GPa. Cette affirmation est contradictoire avec la littérature. En effet, les propriétés de l'austénite ne sont pas en fonction de la température. Par contre, si on se réfère au diagramme de phase, on remarque que les droites de  $M_f$  et  $M_s$  ont un changement de pente causé par la présence de la phase R. De plus, on sait que cette phase a une hystérésis de température très petite. La phase R se produit donc à des températures très proches de  $A_f$  et  $A_s$ . Le module de Young de la figure 77 est donc un mélange du module de Young de la phase R et de l'austénite.

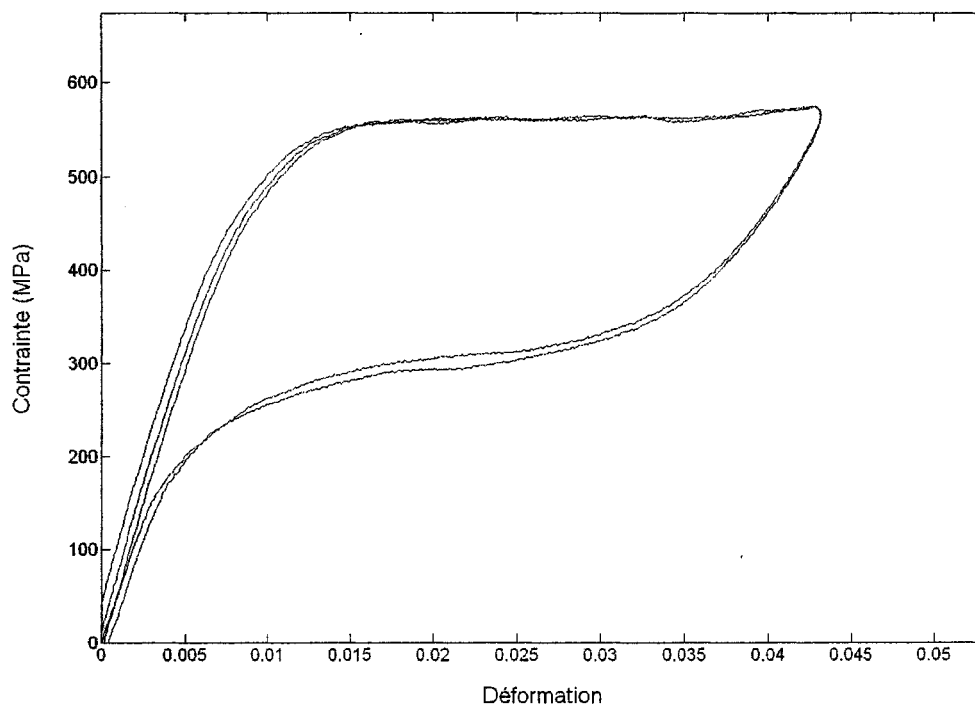


Figure 76 Essai de traction à une température de 338 degrés Kelvin

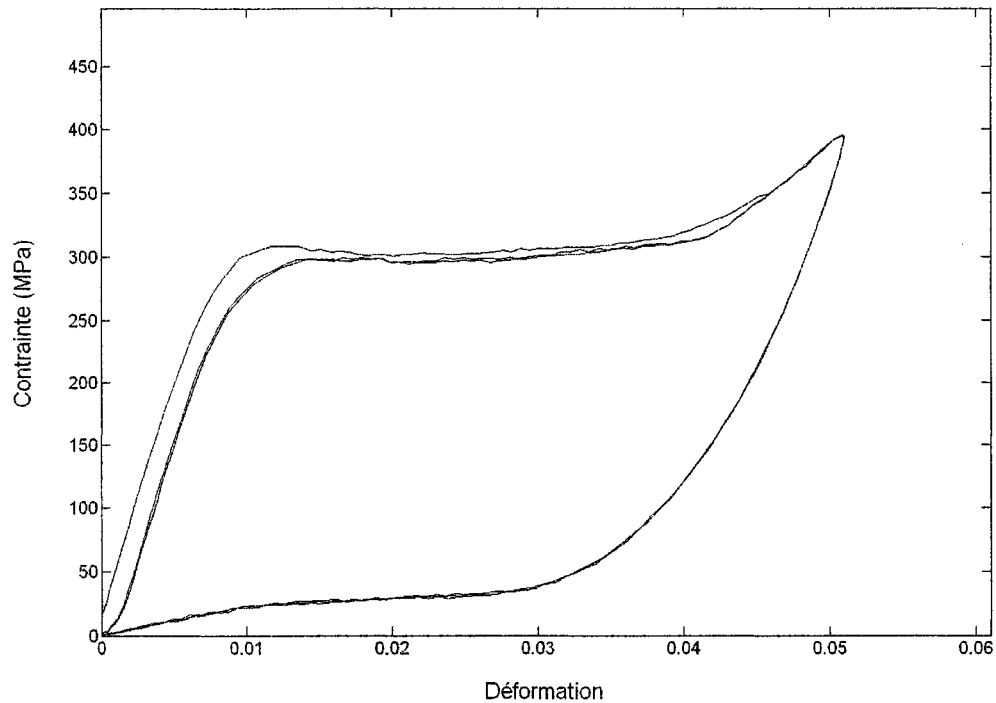


Figure 77 Essai de traction à une température de 303 degrés Kelvin

Finalement, tous les paramètres pour le modèle mécanique se retrouvent sur le diagramme de phase, à l'exception du coefficient de Poisson (fixé à 0.33 pour les raisons énumérées à la section 3.1.6 ) et du module de Young de l'austénite et de la martensite.

#### 4.5 Essais thermiques

Les essais thermiques sont effectués sur un banc d'essai réalisé à cette fin. Il est composé essentiellement :

- d'une enceinte thermique qui permet de contrôler la température ambiante de l'AMF à l'aide de cellules thermoélectriques,
- d'une cellule de charge de 50 livres qui permet de mesurer la contrainte appliquée sur le fil,

- d'un capteur de déplacement de 10 mm (LVDT) qui permet de mesurer la déformation du fil,
- d'une source d'alimentation qui permet de chauffer l'AMF par effet Joule

La figure 78 montre une schématisation du banc d'essai tandis que la figure 79 et la figure 80 sont des photographies du montage. Le banc d'essai permet d'obtenir les résultats nécessaires à la validation du module thermique. Tout d'abord, à l'aide de l'enceinte thermique, il est possible de contrôler la température de l'air ambiant. Par la suite, avec l'application de la charge, l'échantillon est déformé. Finalement, en injectant le courant dans le fil, on force la transformation et on mesure les déplacements à l'aide du LVDT. On contrôle donc la température et le courant injecté tandis que la charge, normalement constante, et les déplacements sont mesurés.

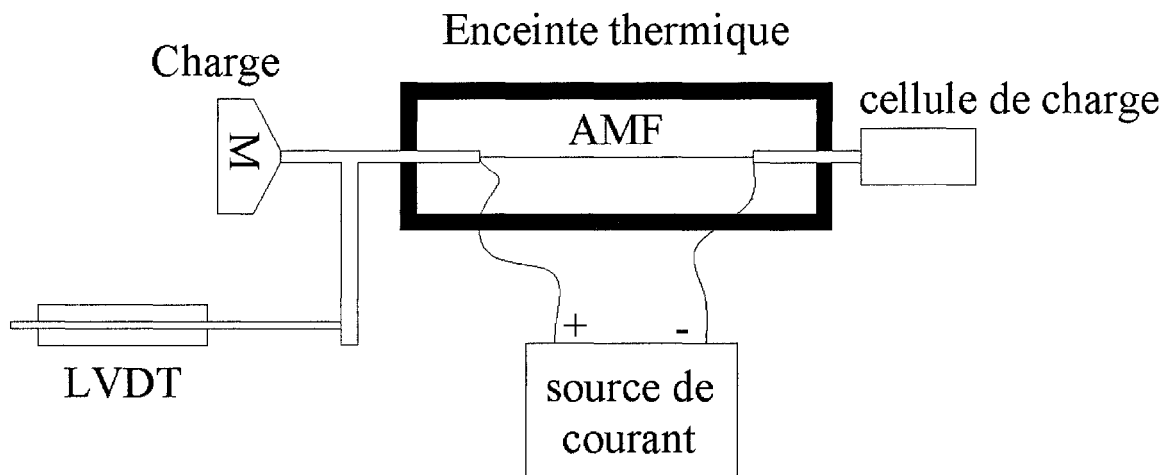


Figure 78 Schématisation du banc d'essai

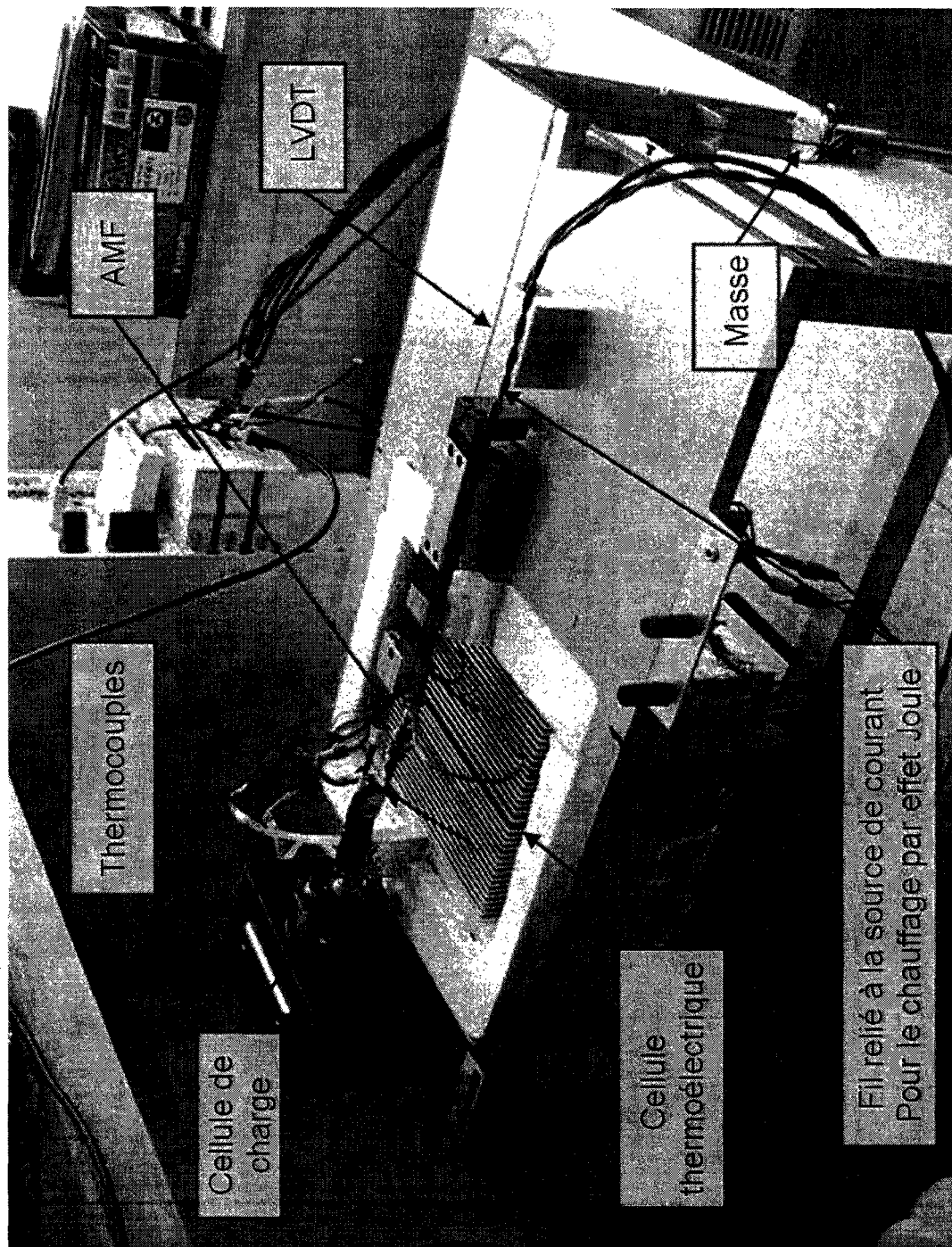


Figure 79 Image du banc d'essai sans couvercle

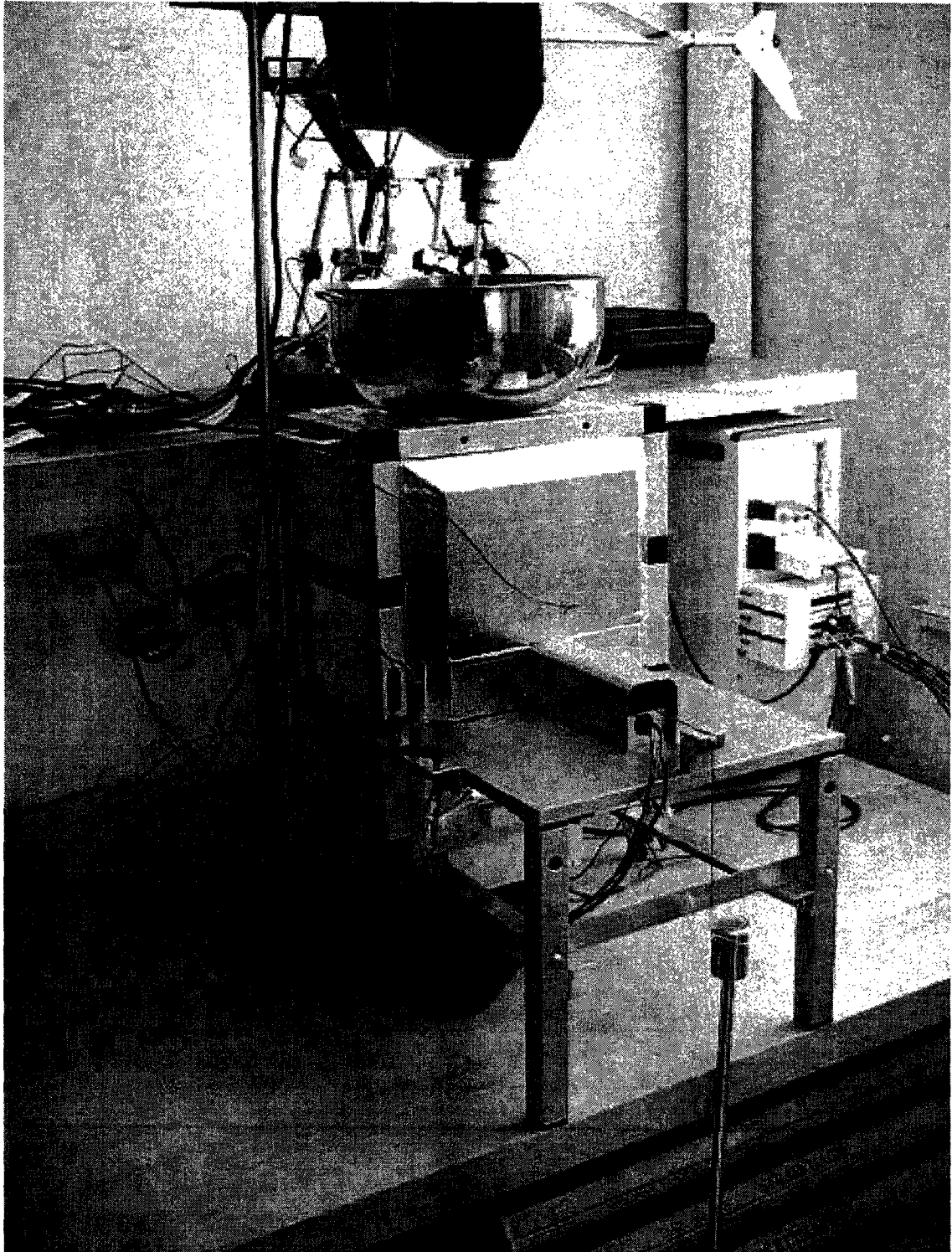


Figure 80 Image du banc d'essai avec couvercle



Les variables thermiques utilisées par le modèle sont la chaleur spécifique  $C_p$ , la chaleur latente  $H$ , la résistance thermique  $R_{\text{ther}}$ , la résistivité électrique  $\rho_{\text{elec}}$  ainsi que le courant  $I$ . La résistance électrique est très facile à mesurer à l'aide d'un ohmmètre tandis que le courant est une valeur imposée par l'utilisateur. Cependant, les autres variables sont difficiles à mesurer. Elles ont donc été trouvées par essai et erreur, c'est-à-dire qu'un test a d'abord été effectué sur le banc d'essai. Par la suite, à l'aide de simulation, on trouve la combinaison qui correspond aux résultats obtenus. Bien entendu, il est toujours possible de chercher dans la littérature afin de se donner des points de départ. Ces simulations ont permis de constater que la résistance thermique est indépendante de la chaleur latente et de la chaleur spécifique, alors que ces deux dernières sont inversement proportionnelles. Les valeurs trouvées sont donc les suivantes :

Tableau VIII

Variables nécessaires pour le modèle thermique

$\rho_{\text{elec}}$	$1.166 \mu\Omega * m$
$R_{\text{ther}}$	45 K/W
$C_p$	450 J/kg*K
$H$	20 kJ/kg

Ces valeurs sont très réalistes. En effet, la littérature répertorie une grande plage de valeurs et celles utilisées ici entrent très bien dans cette plage. Il est à noter que la résistance électrique dépend de l'état du matériau, c'est-à-dire de la proportion de martensite. Cependant, dans le cas présent, elle sera considérée comme constante. Le tableau IX présente les valeurs trouvées par quelques auteurs :

Tableau IX

Variables thermiques répertoriées dans la littérature.

	Shanin [69]	Prahlad [80]	Iadicola [81]	Brailovski [73]
$C_p \left( \frac{J}{kg \cdot K} \right)$	250	600	837	700
$H \left( \frac{kJ}{kg} \right)$	30	5	12.3	40
$\rho_{elec} (\mu\Omega \cdot m)$	-	-	-	0.725
	Chaillet [82]	Benzaoui [32]	Luo [83]	Jmmedical [76]
$C_p \left( \frac{J}{kg \cdot K} \right)$	-	-	630	837
$H \left( \frac{kJ}{kg} \right)$	-	20.6	4	24.2
$\rho_{elec} (\mu\Omega \cdot m)$	1.2	0.8	-	1

Maintenant que toutes les variables nécessaires au modèle sont connues; il est possible d'effectuer des essais en contrôlant la température ambiante autour de l'échantillon ainsi que le courant nécessaire au chauffage et la charge appliquée.

## CHAPITRE 5

### VALIDATION DU MODÈLE

#### 5.1 Discussion de l'étude paramétrique

L'étude paramétrique a permis de trouver l'influence de certains paramètres sur un échantillon d'AMF. De plus, il ne faut pas oublier que l'objectif de ce modèle est de valider la faisabilité d'un actionneur compact et rapide en alliage à mémoire de forme. Pour ce faire, les dimensions géométriques seront choisies en fonction de la charge appliquée ainsi que du déplacement voulu. En effet, la charge appliquée est contrôlée par la section transversale de l'échantillon tandis que le déplacement est contrôlé par la déformation, c'est-à-dire par la longueur de l'échantillon. Cependant, il ne faut pas oublier que le diamètre doit être le plus petit possible afin de minimiser la résistance thermique et ainsi maximiser la fréquence de l'actionneur. Toutefois, il n'est pas nécessaire d'utiliser un seul fil. Il est possible d'employer plusieurs fils : le diamètre peut donc être très petit tandis que la surface transversale reste grande. De plus, puisque la température ambiante a un effet certain sur la fréquence, il est nécessaire d'utiliser l'actionneur à des températures froides. Bien entendu, plus la puissance de courant est élevée, plus la température pourra être froide. Cependant, il faut faire attention à la notion de froid. En effet, le froid pour un AMF commence pour des températures inférieures à  $M_s$ , donc le matériau à préconiser doit avoir des températures de transformation les plus élevées possibles. Il est ainsi techniquement plus facile d'obtenir une grande différence de température.

Finalement, la résistance thermique doit être faible afin d'améliorer, encore une fois, la fréquence de l'actionneur. Bien entendu, encore une fois, plus la puissance de courant est élevée, plus la résistance thermique pourra être petite. Il existe d'ailleurs plusieurs façons de minimiser la résistance. Le concepteur doit cependant vérifier les autres contraintes du projet afin de choisir la meilleure solution. Voici donc quelques exemples

envisageables. Il est possible de submerger l'échantillon dans un liquide plutôt que dans un gaz. Cependant, il est souvent préférable d'obtenir des actionneurs en mode solide. Il est aussi possible d'augmenter la vitesse de l'écoulement autour de l'AMF. Cette approche est plus simple, mais elle nécessite l'ajout d'un ventilateur ou d'une bombonne de gaz comprimé. Tout dépend de l'application développée. Finalement, puisque le changement de phase se fait théoriquement à la vitesse du son, les seuls paramètres qui limitent la fréquence de l'actionneur sont l'inertie de la charge à déplacer ainsi que les paramètres liés au transfert de chaleur.

## **5.2 Discussion et comparaison des résultats statiques**

Afin d'éliminer les confusions possibles, le modèle mécanique et thermique seront dissociés. Il est ainsi possible de valider une première partie avant de valider l'ensemble du modèle. Cette technique est simple et efficace, car le nombre de variables à analyser est plus petit. Une fois que tout fonctionne, l'ajout des autres variables peut se faire. La composition du fil utilisé est décrite à la section 4.1. ainsi que le diagramme de phase et toutes les variables nécessaires aux calculs des déformations.

### **5.2.1 Effet mémoire de forme**

La figure 81 représente une courbe d'effet mémoire de forme. La courbe marquée de points représente les résultats expérimentaux tandis que la courbe continue reproduit les résultats calculés. La comparaison des deux courbes est presque parfaite. Il est à noter que les résultats numériques sont caractérisés par des droites. En modifiant la cinétique de transformation, il serait possible d'améliorer encore plus la juxtaposition puisque les changements de pente se feraient plus progressivement.

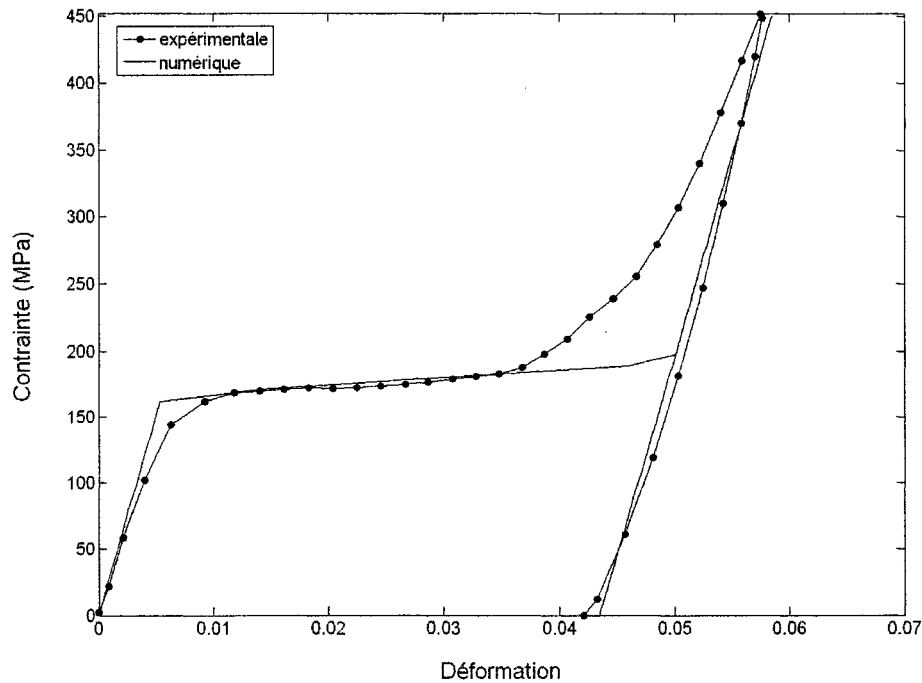


Figure 81 Courbe expérimentale et numérique pour un essai de traction à mémoire de forme ( $T=273\text{ K}$ )

### 5.2.2 Effet superélastique

Tout comme l'effet mémoire de forme, l'effet superélastique est bien représenté dans la figure 82 et la figure 83. Cependant, on remarque à la figure 82 qu'on sous-estime légèrement les contraintes critiques. Cependant, en se référant au diagramme de phase de la figure 75, on remarque qu'à cette température, les points trouvés expérimentalement sont légèrement au-dessus de la droite de contrainte critique estimée. Il est donc très important d'avoir le maximum de points pour construire le diagramme de phase sinon de légères imperfections comme celle trouvée ici se reproduisent. Finalement, on pourrait penser que la déformation de transformation numérique est surestimée à la figure 83. Par contre, en se référant la figure 82, on s'aperçoit que si le chargement expérimental avait été plus élevé, la courbe aurait été plus représentative. Il

faut donc faire attention à l'interprétation des résultats. Comme évoqué précédemment, la modification de la cinétique de transformation augmenterait la superposition, ce qui éviterait toute confusion comme celle présentée à la figure 83.

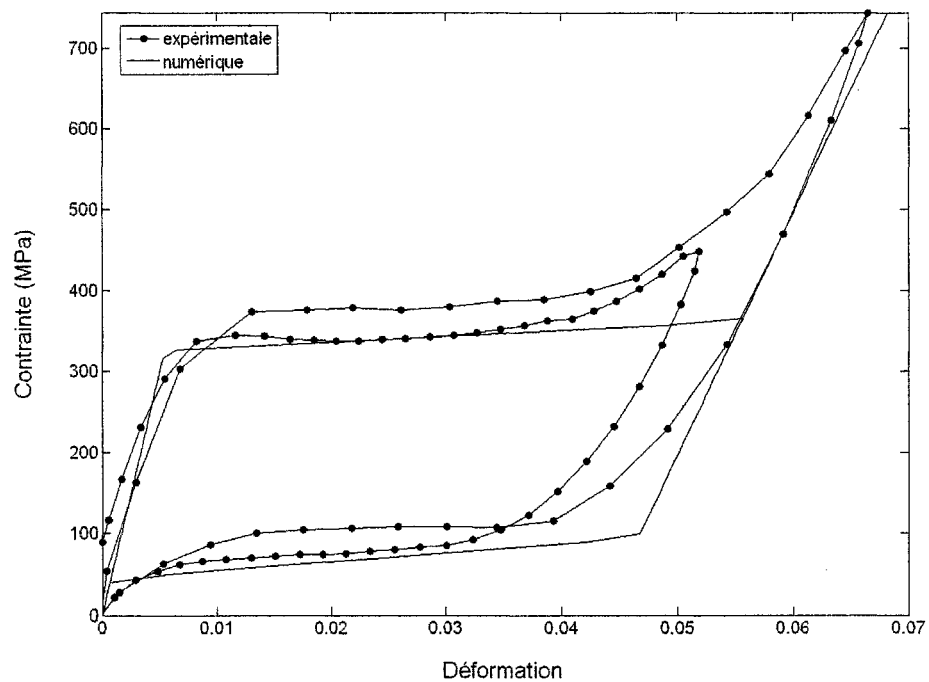


Figure 82 Courbe expérimentale et numérique pour un essai de traction superélastique (T=308 K)

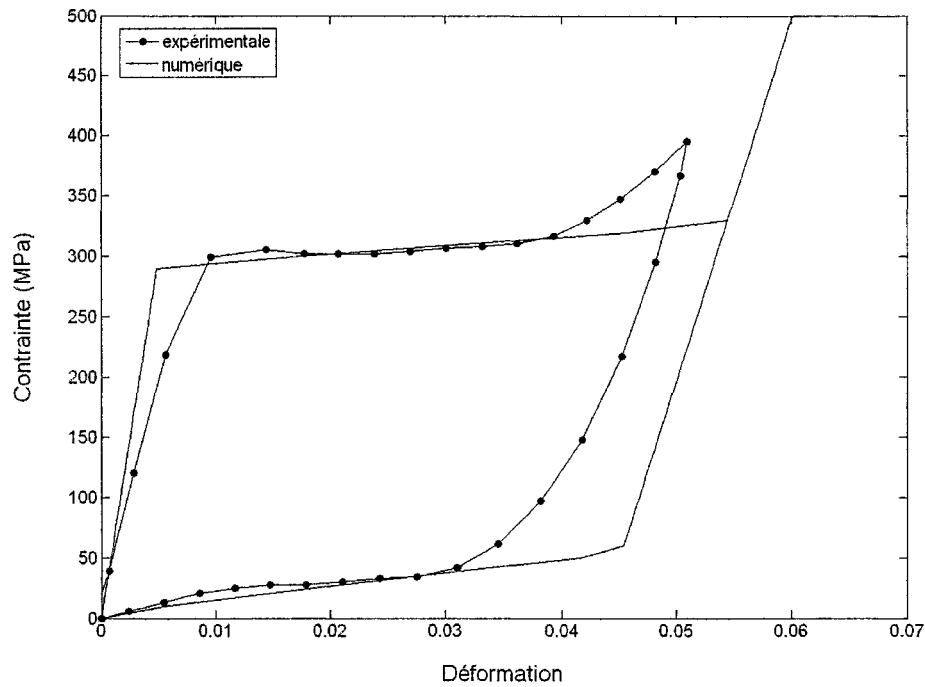


Figure 83 Courbe expérimentale et numérique pour un essai de traction superélastique à la température de transformation  $A_f$  ( $T=303$  K)

### 5.3 Discussion et comparaison des résultats dynamiques

Maintenant que le modèle mécanique semble bien représentatif du comportement réel de l'AMF, il est possible de voir comment le modèle répond à des chargements thermiques. Cette section présente des tests à contrainte fixe avec variation de la température. On valide donc cette fois le module thermique ainsi que le module mécanique à contrainte fixe.

#### 5.3.1 Variation du profil de courant

Afin de vérifier si le modèle répond bien, différents tests seront effectués avec comme entrée différents profils de courant ainsi qu'une charge constante d'environ 55 newtons. La figure 84 montre un sinus variant entre 0 et 2.5 ampères. La température de

l'environnement entourant l'échantillon est maintenue à 0 °C pendant toute la durée du test et la fréquence du sinus est de 0.05 Hz. De plus, la figure 85 représente un essai identique à l'exception que la fréquence est diminuée à 0.01 Hz. Les résultats ainsi obtenus sont très réalistes.

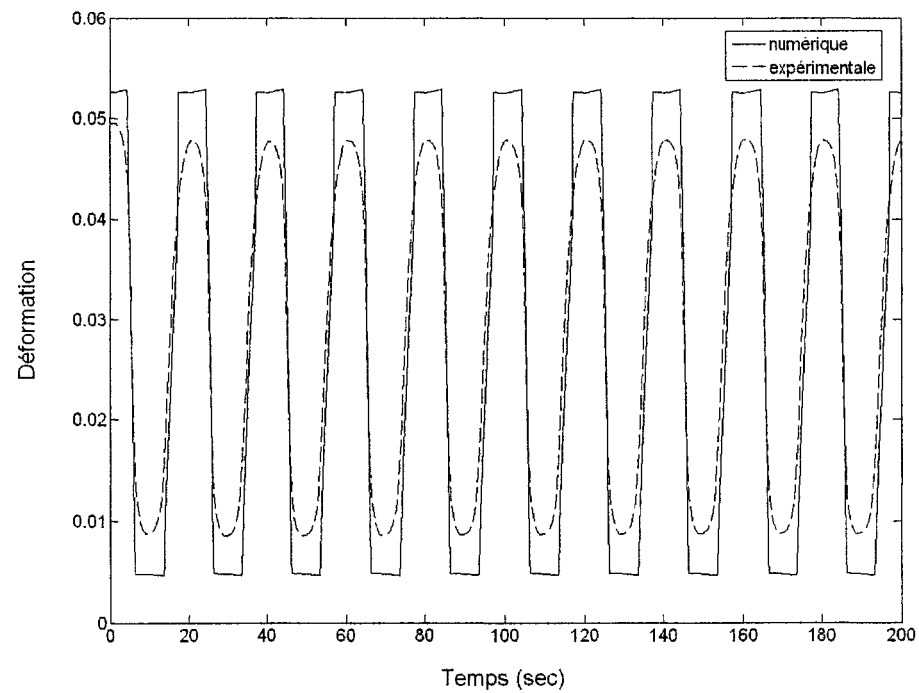


Figure 84 Comparaison des résultats pour un profil de courant en sinus à une fréquence de 0.05 Hz



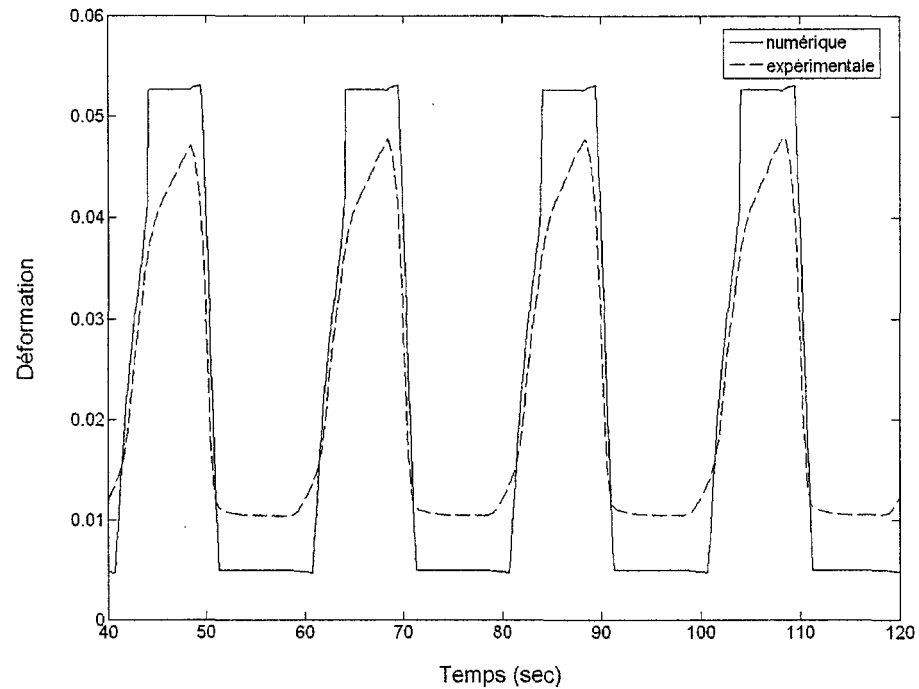


Figure 87 Comparaison des résultats pour un profil d'onde carré de fréquence 0.05 Hz et un cycle de travail de 50 %

Le prochain test ressemble aux deux précédents, c'est-à-dire qu'il a été fait avec une température ambiante de 0 °C et avec une amplitude de courant qui varie entre 0 et 2.5 ampères. Cependant, la fréquence est augmentée à 0.1 Hz avec un cycle de travail de 50 %. Les résultats sont présentés à la figure 88. Cette figure démontre l'effet transitoire causé par le transfert de chaleur. En effet, on remarque que les premiers cycles sont différents des derniers.

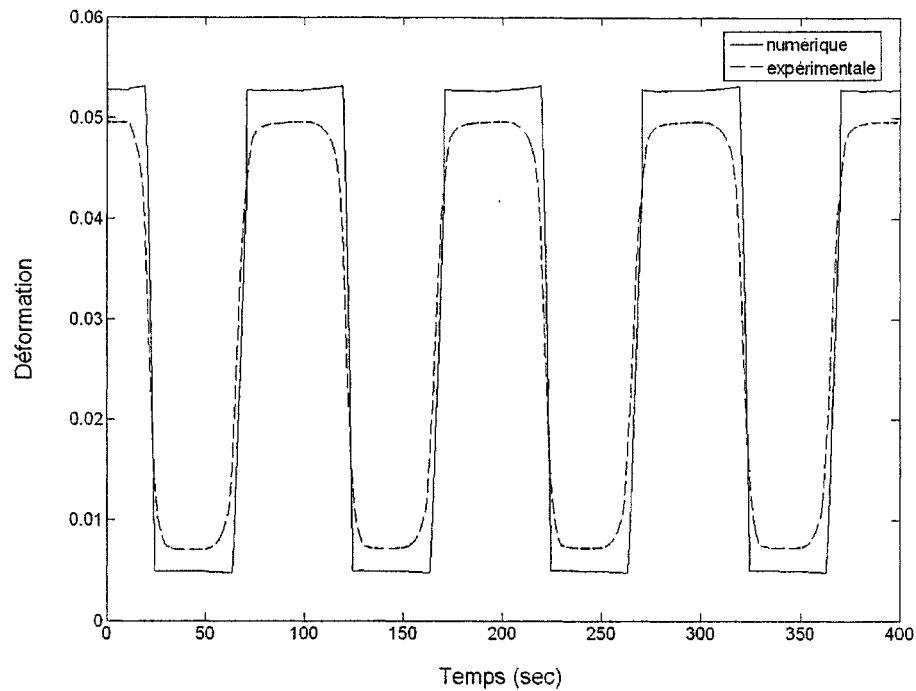


Figure 85 Comparaison des résultats pour un profil de courant en sinus à une fréquence de 0.01 Hz

Les prochaines figures montrent des profils de courant carré à une fréquence de 0.05 Hz. Les essais sont réalisés à température constante, c'est-à-dire à 0 °C. L'amplitude du courant est aussi constante et elle varie entre 0 et 2.5 ampères. Ce qui différencie les essais est le cycle de travail qui représente la portion du temps lors duquel le courant est injecté dans le fil d'AMF. Par exemple, un cycle de travail de 50 % signifie que le courant est injecté pendant 50 % de la période et coupé pendant 50 % de la période. Par contre, un cycle de travail de 10 % signifie que le courant est injecté pendant seulement 10 % de la période. On remarque dans la figure 86 et la figure 87 que plus le cycle de travail est petit, plus la fréquence peut être augmentée. En effet, le temps de chauffage est beaucoup plus rapide que le temps de refroidissement. En diminuant le cycle de travail, on favorise le refroidissement et on élimine la surchauffe qui risque d'endommager l'échantillon. On sauve ainsi une grande quantité d'énergie.

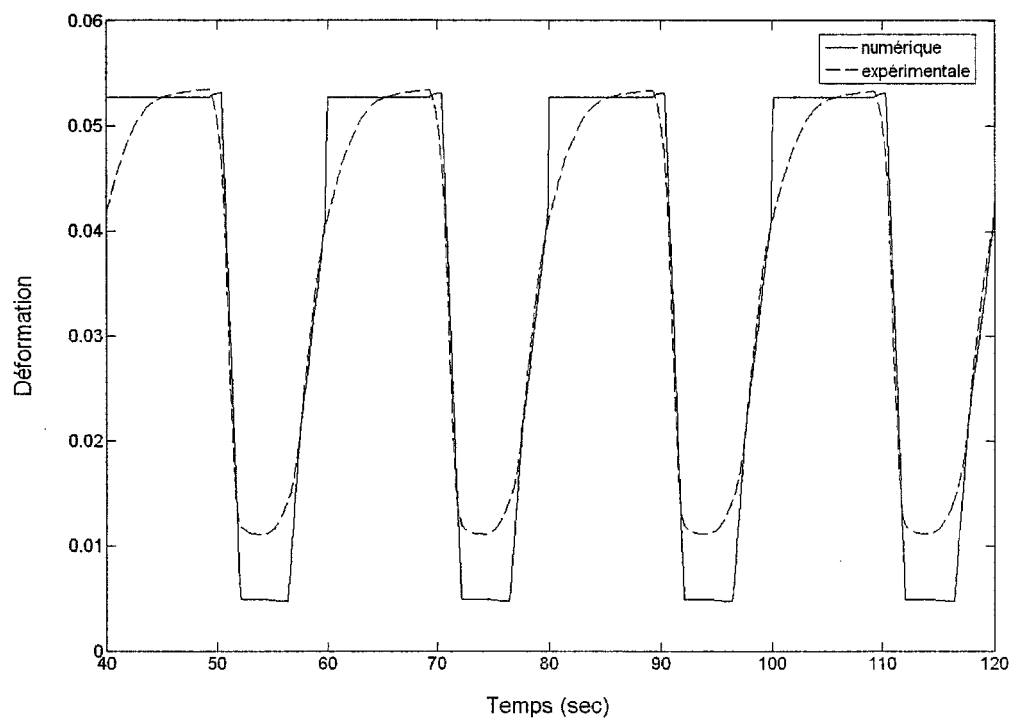


Figure 86 Comparaison des résultats pour un profil d'onde carré de fréquence 0.05 Hz et un cycle de travail de 25 %

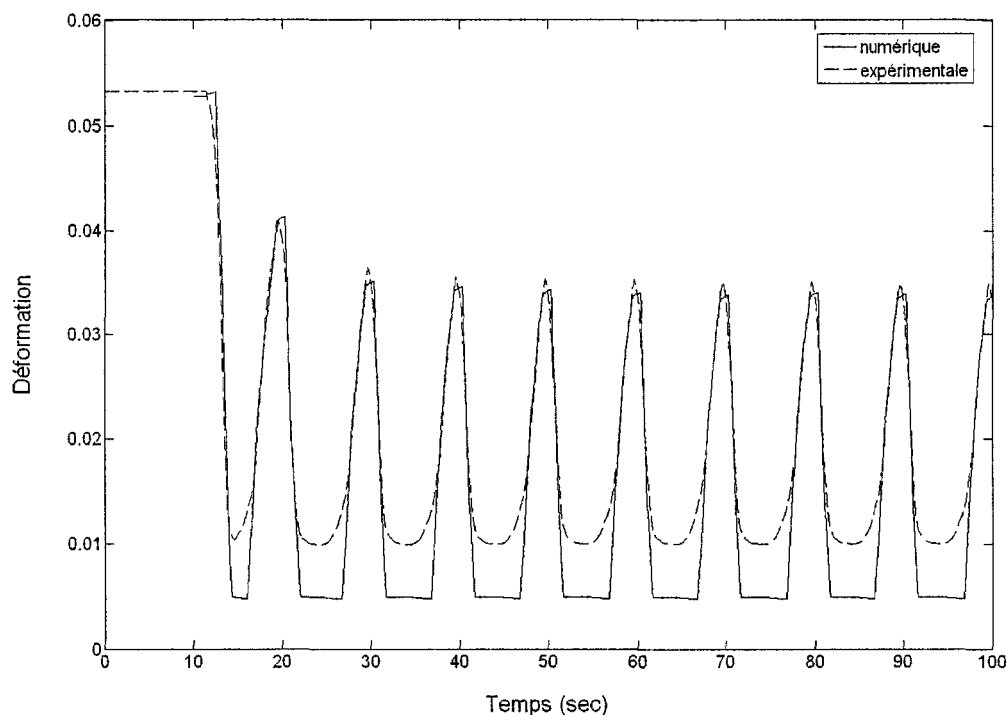


Figure 88 Comparaison des résultats pour un profil d'onde carré de fréquence 0.1 Hz et un cycle de travail de 50 %

Par contre, on remarque dans la plupart des essais la tendance à surestimer la déformation au chauffage. Encore une fois, la cinétique de transformation peut être mise en cause. En effet, en observant la figure 89, on remarque par exemple que, pour une contrainte de 400 MPa, la déformation n'est pas aussi grande expérimentalement que numériquement, et ce, même si on accepte que les résultats statiques sont valables. La modification de la cinétique de transformation permettrait d'améliorer les résultats statique et, par le fait même, les résultats dynamiques. En effet, en modifiant la cinétique de transformation, les résultats numériques obtenus jusqu'à présent par des droites pourraient être remplacé par des courbes ce qui simulerait mieux l'AMF et ainsi diminuerait de façon significative l'erreur obtenue.

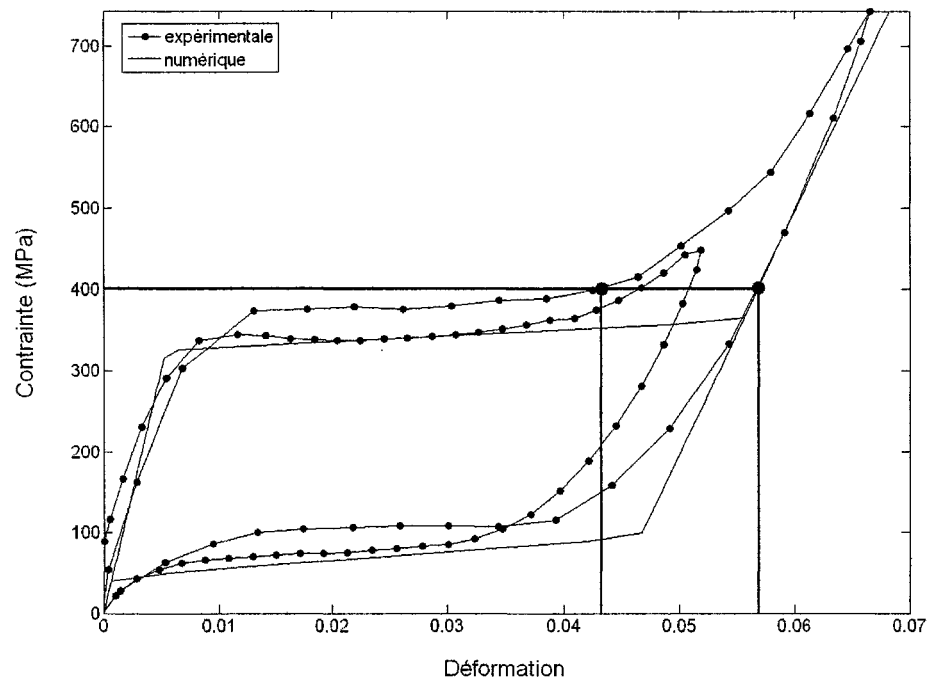


Figure 89 Essai de traction à  $T=308K$

## CONCLUSION

Le modèle hybride constitué à partir d'un modèle phénoménologique et microscopique présenté dans ce document fonctionne bien. En effet, il est possible de reproduire le comportement mécanique d'un alliage à mémoire de forme, et ce, autant dans son domaine d'effet mémoire de forme que dans son domaine superélastique. De plus, l'ajout d'un module thermique permet de reproduire le comportement de l'alliage, mais cette fois de façon dynamique. Le modèle prend donc comme entrées le courant, les proportions de phases, les conditions aux frontières ainsi que la contrainte appliquée. Enfin, le modèle donne comme sortie la déformation dans le temps ainsi que la proportion de martensite et de phase R engendrée par le chargement thermique et/ou mécanique.

Les notions de base des alliages à mémoire de forme ainsi qu'un bref historique sont expliquées. Par la suite, le modèle est décrit étape par étape. Une section est réservée afin de présenter les modèles de la littérature. Cette dernière permet de justifier la raison de la création d'un nouveau modèle d'alliage à mémoire de forme alors qu'il en existe déjà plusieurs. Le nouveau modèle est basé sur le modèle phénoménologique de Brinson. Par contre, l'ajout de notions de micromécanique basé sur le modèle de Likhatchev améliore ce dernier puisqu'il est maintenant possible d'ajouter la microstructure de l'alliage.

Par la suite, une étude paramétrique a été réalisée sur un matériau fictif. Elle a permis de connaître les variables qui ont le plus d'impact sur le modèle. On pourra de cette façon connaître les caractéristiques du matériau qui sont importantes. En connaissant ces dernières, il sera plus simple de choisir le matériau adéquat pour l'optimisation d'un actionneur dédié à une application donnée. Cette étude a permis de démontrer que pour obtenir un actionneur rapide, il faut absolument diminuer la résistance thermique de l'alliage à mémoire de forme. Que ce soit en abaissant la température ambiante, en

diminuant le diamètre du fil ou en changeant l'environnement l'entourant, il est primordial de la diminuer.

La méthodologie nécessaire à la caractérisation d'un fil est aussi expliquée. De plus, des résultats expérimentaux sont présentés et comparés afin de confirmer le bon fonctionnement du modèle. Bien sûr, ceux-ci ne sont pas parfaits. Tout dépend de l'utilisation du modèle. Cependant, dans le cadre de ce projet les attentes sont comblées. En effet, le modèle est suffisamment précis pour donner une réponse de façon qualitative. Bref, il permet de prédire si les AMF peuvent répondre aux exigences du projet en force et fréquence ainsi qu'aux contraintes dimensionnelles et thermiques.

## RECOMMANDATIONS

Cette section concerne les améliorations à apporter au modèle hybride afin de le rendre plus performant mais surtout afin de rendre son utilisateur plus confiant en son comportement.

### 1. Génération de contraintes

Le comportement de l'alliage lors de la génération de contrainte n'a pas été testé. Il faut cependant se souvenir que ce modèle a été créé dans le but d'optimiser les valeurs pour un actionneur : la génération de contrainte à déplacement fixe n'est donc pas nécessaire à ce moment. Cependant, il n'y a aucune raison envisageable pour que ce phénomène ne fonctionne pas bien. Il serait donc suggéré de vérifier ce comportement afin de confirmer son fonctionnement. Le modèle pourrait être ainsi plus général et plus polyvalent.

### 2. Cinétique de transformation

Comme décrit précédemment la modification de la cinétique de transformation pourrait améliorer les résultats de façon significative. De plus, la modification des équations serait relativement simple. Cette recommandation est probablement la plus simple à réaliser.

### 3. Modèle 3D

Finalement, la principale force de ce modèle réside probablement dans un modèle général capable de simuler tous les principaux comportements des AMF en trois dimensions. De plus, la formulation peut être appliquée facilement à des simulations tridimensionnelles car elle repose sur des concepts microstructuraux et tensoriels. Par



exemple, il serait facile de reproduire le comportement d'un matériau lors d'un essai de traction biaxiale.

#### 4. Inertie

Pour une application où la fréquence est élevée, il serait important d'ajouter une section pour le calcul de l'inertie de la masse en mouvement puisque l'augmentation de la vitesse fait augmenter la contrainte à l'intérieur de l'alliage. Tout dépend de l'application car pour de faibles vitesses ou pour de faibles masses, cet ajout n'est pas nécessaire puisque l'hypothèse d'une inertie nulle peut être faite.

#### 5. Énergie

Puisque l'aéronautique a des exigences particulières, c'est-à-dire que la puissance électrique est limitée par le poids des batteries, il serait intéressant de vérifier le comportement de l'alliage soumis à un PWM (*pulse width modulation*). En effet, Song et Ma [84] stipulent que cette technique permet de sauver beaucoup d'énergie.

#### 6. Charge

Les tests expérimentaux effectués dans ce mémoire se limitent à des charges constantes créées par des poids morts. Cependant, il serait intéressant de vérifier le comportement pour des charges non constantes créées par exemple par une combinaison de ressort et d'amortisseur. Tout comme pour la génération de contrainte, il n'y a aucune raison envisageable pour que ce type de chargement ne fonctionne pas bien. Par contre, il serait suggéré de vérifier le comportement du modèle face à de telles charges afin de confirmer son fonctionnement. Le modèle pourrait être ainsi plus général et plus polyvalent.

## **ANNEXE 1**

### **Description du programme**

Le programme est constitué de 4 fonctions et de deux scripts. Les fonctions sont nécessaires pour le calcul tandis que les scripts ne servent qu'à créer différents chargements.

#### 1. fichier wongb

Ce fichier contient les fonctions wongb, maxmin et H. La fonction H prend comme argument un *float* et retourne la valeur 1 ou 0. Elle effectue donc le travail de la fonction Heaviside, voir figure 90. La fonction maxmin prend comme argument un *float* et retourne une valeur comprise entre 0 et 1. Cette fonction permet de s'assurer que la proportion de martensite reste dans une plage de donnée souhaitée, voir figure 91.

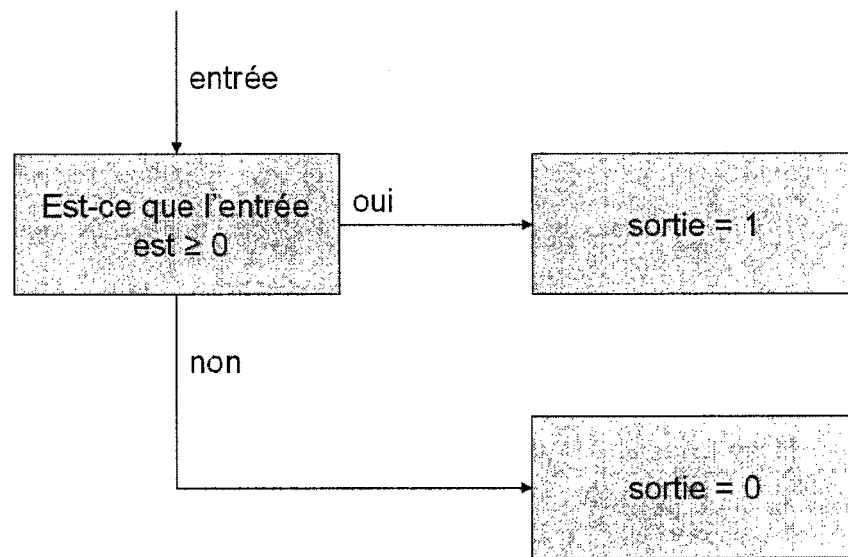


Figure 90 Fonction H

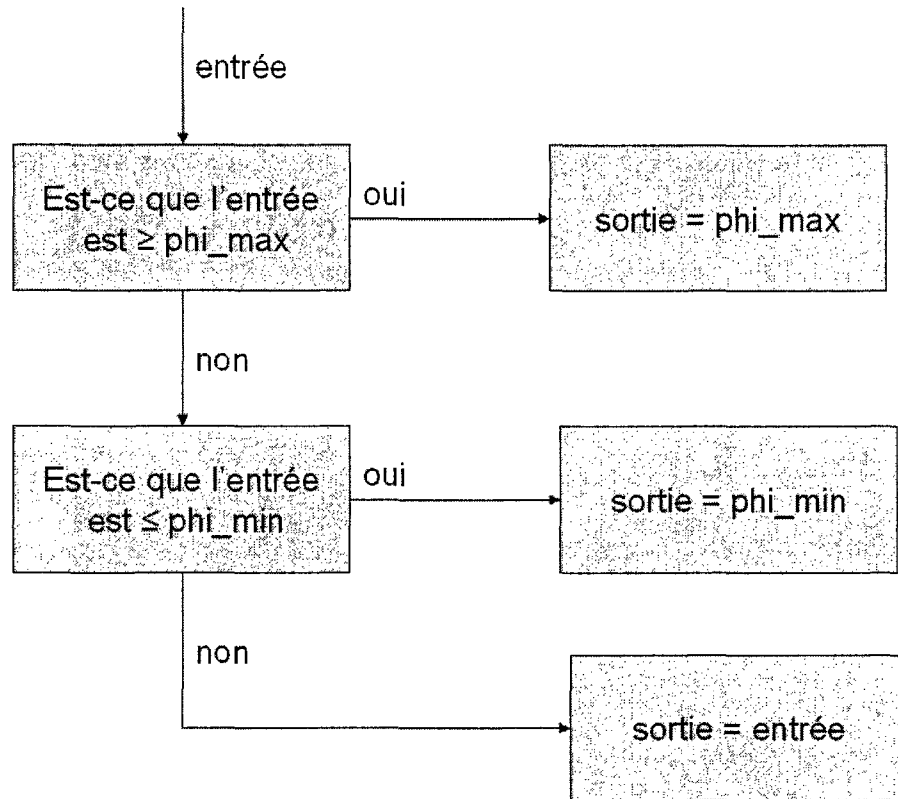


Figure 91 Fonction maxmin

La fonction wongb permet le calcul des déformations macroscopiques à partir des notions élaborées dans le chapitre 2. Elle prend comme arguments les contraintes et les températures initiales et finales ainsi que l'orientation des variantes de martensite. Elle retourne comme sortie les déformations macroscopiques ainsi que la proportion de martensite et l'orientation des variantes obtenues.

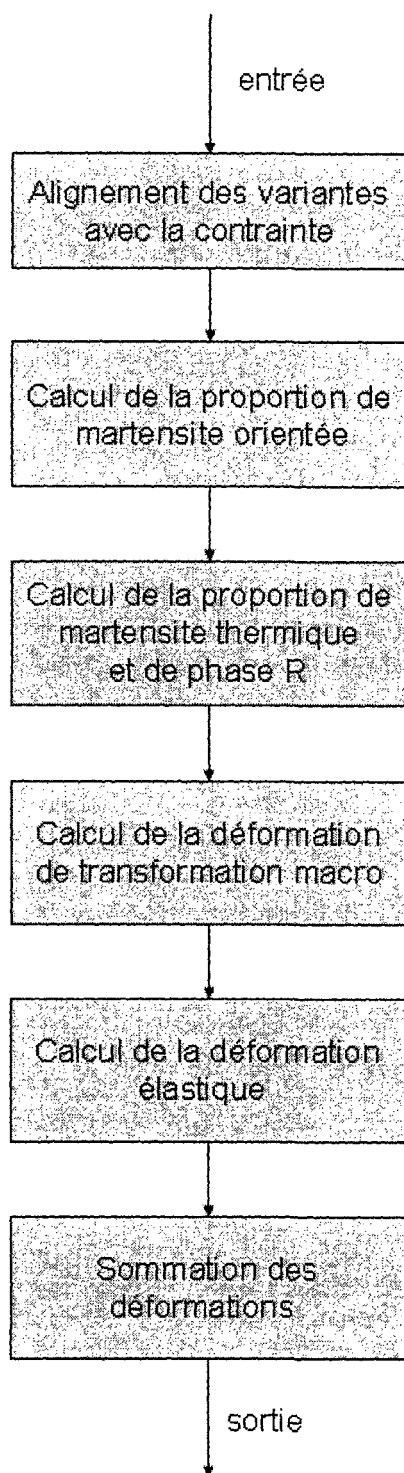


Figure 92 Fonction wongb

## 2. fichier actuateur

Ce fichier contient la fonction actuateur. Elle prend comme argument les contraintes initiales et finales, le courant, la température du fil et la température ambiante, l'incrément de temps, ainsi que la proportion de martensite et l'orientation des variantes initiales. Elle retourne comme sortie les déformations macroscopiques, la température du fil ainsi que la proportion de martensite et l'orientation des variantes obtenues. Cette fonction transforme le courant en température et utilise la fonction wongb pour le calcul des déformations.

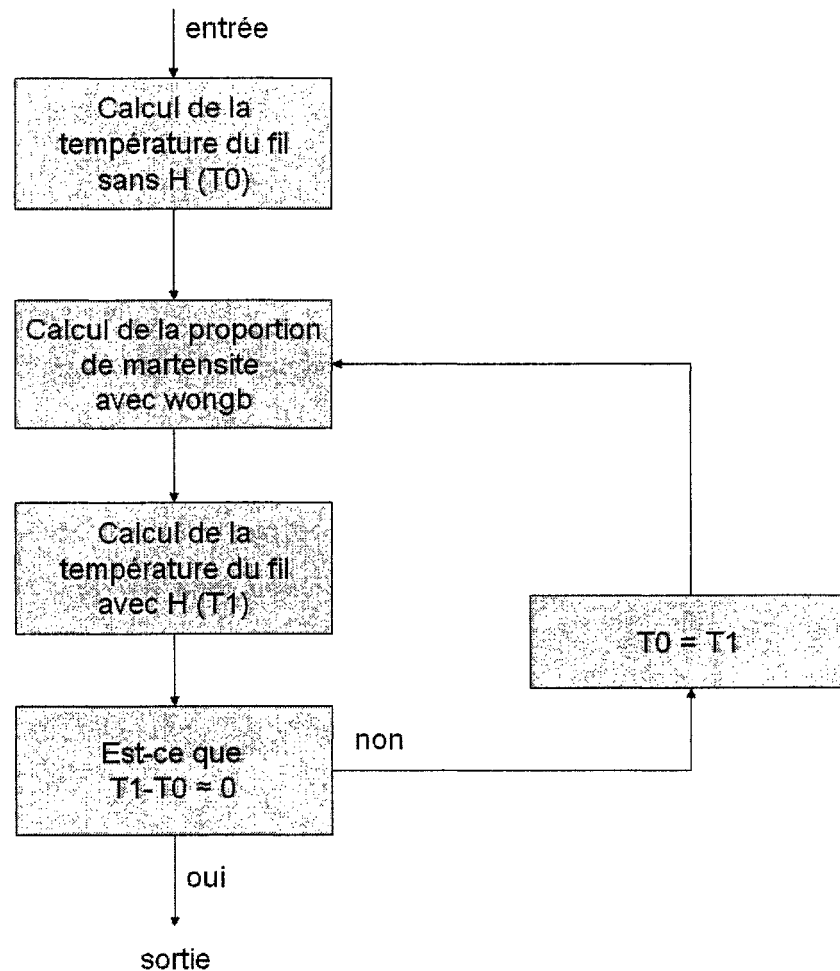


Figure 93 Fonction actuateur

### 3. fichier main et fichier main\_TC

Les fichiers main et main\_TC contiennent des scripts. Ces derniers permettent de créer des matrices de chargement facilement. Par la suite, ils utilisent cette matrice et font appel à aux fonctions pour le calcul des déformations. Le script main crée une matrice de chargement pour la fonction wongb. Il est donc la partie mécanique du modèle, c'est-à-dire qu'il crée une matrice contrainte température. À l'opposé, le script main\_TC fait appel à la fonction actuateur, il crée donc une matrice de chargement de la contrainte et du courant dans le temps. Ce script est donc la partie transfert de chaleur et donne des résultats dynamiques.

## **ANNEXE 2**

### **Code MATLAB des différentes fonctions**



fichier wongb

```

function [def,def_elas,def_tr, phi, Api_Aqk_Dik] =
wongb(sig0,sig,T0,T,phi0,Api_Aqk_Dik_0)
% CETTE FONCTION CALCULE LES DÉFORMATION POUR UN INCRÉMENT

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% PROPRIÉTÉ DE L'ALLIAGE %%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% PROPORTION DE MARTENSITE MINIMUM
phi_min=0;

% PROPORTION DE MARTENSITE MAXIMUM
phi_max=1;

% MODULE DE YOUNG DE L'AUSTÉNITE
E_a =60000;

% MODULE DE YOUNG DE LA MARTENSITE
E_m=30000;

% MODULE DE YOUNG DE LA PHASE R
E_r=30000;

% COEFFICIENT DE POISON DES PHASES
v_a=.33 ;
v_m=v_a;
v_r=v_a;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CALCULS DES CONTRAINTES CRITIQUES %%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% TEMPÉRATURE DE TRANSFORMATION DE L'AUSTÉNITE
As=296.25;
Af=302.5;

% TEMPÉRATURE DE TRANSFORMATION DE LA MARTENSITE
Ms=200;
Mf=175;

% TEMPÉRATURE DE TRANSFORMATION DE LA PHASE R
Rf=290;
Rs=300;
% PHASE R AU REFROIDISSEMENT
Rs_c=Rs;
Rf_c=Rf;
% PHASE R AU CHAUFFAGE (ABSENTE)

```

```
Rs_h=inf;
Rf_h=inf;
```

```
% CONTRAINTE CRITIQUE DE L'AUSTÉNITE
SAs = 8*T - 2370;
SAf = 8*T - 2420;
```

```
% CONTRAINTE CRITIQUE DE LA MARTENSITE
if T < Rf_c
    SMs = 4.29*T - 1005;
elseif T < Ms
    SMs = 100;
else
    SMs=7*T - 1830;
end
if T < Rf_c
    SMf = 4.29*T - 980;
elseif T < Ms
    SMf = 150;
else
    SMf=7*T - 1795;
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% TEXTURES DE L'AMF %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% TÉLÉCHARGEMENT DE LA MATRICE angl QUI CONTIENT
% LES ANGLES D'EULER DE TOUS LES GRAINS
load angl.mat
```

```
% COMPTE LE NOMBRE DE GRAIN DE LA MATRICE angl
nb=length(angl);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CALCUL DES VARIANTES DE MARTENSITE %
% DÉFORMATION PRINCIPALE SELON KNOWLES ET OTSUKA
D1=-0.0337;
D2=0.1045;
D3=-0.0699;
```

```
% BOUCLE POUR LE CHOIX DE LA VARIANTE DE MARTENSITE DE CHAQUE GRAIN
for n=1:nb
    % LES TROIS ANGLES D'EULER
    phi1=angl(n,1);
    phi2=angl(n,2);
```



```

for n=1:nb
    % CONTRAINTE APPLIQUÉE (1D)
    sig_g_ap(n,1)=max(diag(sig));

    % CACUL DE LA PROPORTION DE MARTENSITE ORIENTÉE
    phi(n,1)= (sig_g_ap(n,1) - SMS) / (SMf - SMS)*H(-(phi0(n,1)*(SMf-
SMS)+SMS-sig_g_ap(n,1))) + ...
    (sig_g_ap(n,1) - SAf) / (SAs - SAf)*H((phi0(n,1)*(SAs-
SAf)+SAf-sig_g_ap(n,1))) + ...
    phi0(n,1) *H((phi0(n,1)*(SMf-SMS)+SMS-
sig_g_ap(n,1))*H(-(phi0(n,1)*(SAs-SAf)+SAf-sig_g_ap(n,1))));

    % ON DOIT S'ASSURER QUE LA PROPORTION DE MARTESNITE NE
    % DÉPASSE LA PROPORTION MAXIMUM ET MINIMUM
    phi(n,1) = maxmin(phi(n,1));

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% CALCUL DE LA PROPORTION DE MARTENSITE AUTOACCOMODANTE %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% CALCUL DE LA PROPORTION DE PHASE R %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% VÉRIFICATION DU CHARGEMENT
if T < T0
    cc=1; % A --> M
else
    cc=-1;% M --> A
end

for n=1:nb
    if cc == 1 % A --> M
        if T < Rs_c
            phi(n,3)= (Rs_c - T) / (Rs_c - Rf_c);
            % on doit s'assurer que phi ne dépasse pas phi_max ou
phi_min
            phi(n,3) = maxmin(phi(n,3));
        else
            phi(n,3) = phi0(n,3);
        end
        if T < Ms
            phi(n,2)= (Ms-T)/(Ms-Mf);
            % on doit s'assurer que phi ne dépasse pas phi_max ou
phi_min
            phi(n,2) = maxmin(phi(n,2));
        else
            phi(n,2) = phi0(n,2);
        end
        % martensite a dominance sur phase R
        if sum(phi(n,:)) > phi_max & T >= Ms
            if phi(n,3) < phi_max - phi(n,1)
                phi(n,3) = phi(n,3);
            end
        end
    end
end

```

```

        else
            phi(n,3) = phi_max - phi(n,1);
        end

elseif sum(phi(n,:)) > phi_max & T < Ms
    if phi(n,2) <= phi_max - phi(n,1)
        phi(n,2) = phi(n,2);
    else
        phi(n,2) = phi_max - phi(n,1);
    end
    if phi(n,3) <= phi_max - phi(n,1) - phi(n,2)
        phi(n,3) = phi(n,3);
    else
        phi(n,3) = phi_max - phi(n,1) - phi(n,2);
    end
end

else %cc = -1; % M --> A
    if T > Rs_h & T < Rf_h
        phi(n,3) = (T - Rs_h) / (Rf_h - Rs_h);
        % on doit s'assurer que phi ne dépasse pas phi_max ou
phi_min
        phi(n,3) = maxmin(phi(n,3));
    else
        phi(n,3) = phi0(n,3);
    end
    % la proportion de martensite ne peut augmenter au chauffage
    phi(n,2) = phi0(n,2);

    if phi(n,3) <= phi_max - phi(n,1);
        phi(n,3) = phi(n,3);
    else
        phi(n,3) = phi_max - phi(n,1);
    end

    if phi(n,3) > (phi(n,1) + phi(n,2)) & T > As;
        phi(n,3) = (phi(n,1) + phi(n,2));
        phi(n,3) = maxmin(phi(n,3));
    end

    if phi(n,2) < phi_max - phi(n,1) - phi(n,3);
        phi(n,2) = phi(n,2);
    else
        phi(n,2) = phi_max - phi(n,1) - phi(n,3);
    end
end

```



```

def_elas(3,1)=Eelas(5,1);
def_elas(2,3)=Eelas(6,1);
def_elas(3,2)=Eelas(6,1);

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%calcul des déformations totales %%%%%%%%%%%%%%%
def=(def_tr + def_elas);

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%fonction de maxmin %%%%%%%%%%%%%%%
function [ a ] = maxmin( phi )
% on doit s'assurer que phi ne dépasse pas phi_max ou phi_min
phi_max=1;
phi_min=0;

if phi > phi_max
    a=phi_max;
elseif phi < phi_min
    a=phi_min;
else
    a=phi;
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%fonction Heaviside %%%%%%%%%%%%%%%
function [ a ] = H( b )
% fonction Heaviside
if b >= 0
    a=1;
else
    a=0;
end

```

# **fichier actuateur**

```

function [ Ts1,def,def_elas,def_tr,phi,Api_Aqk_Dik] = actuateur(...
    sig0,sig,I,Ts0,delta_t,phi0,Api_Aqk_Dik_0, Tinf,t)
% CETTE FONCTION CALCULE LES DÉFORMATIONS POUR UN INCRÉMENT
% DONNÉES. ELLE CACULE AUSSI LE TRANSFERT DE CHALEUR.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% GÉOMÉTRIE ET PROPRIÉTÉ
% LONGUEUR
L=70*10^-3; %m

% RAYON
r=(0.5*10^-3)/2; %m

% VOLUME
V=3.1416*r^2*L; % m cube

% DENSITÉ
rho=6500; %kg/m cu

% MASSE
m=rho*V; %kg

% DESTRUCTION DE LA VARIABLE VOLUME
clear V

% RÉSISTIVITÉ
rho=1.166*10^-6; % ohms * m

% RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE
R=rho*L/(pi*r^2); %ohms

% DESTRUCTION DE LA VARIABLE RHO
clear rho

% CHALEUR LATENTE
H=20000; % J / Kg

% RÉSISTANCE THERMIQUE
Rther=45;

% CHALEUR SPÉCIFIQUE
Cp=450; %J / Kg *C

% PROPORTION DE MARTENSITE GLOBALE INITIALE

```



```

[nb,scrap]=size(phi0);
phi0_m=sum(sum(phi0))/nb;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% TRANSFERT DE CHALEUR %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CALCUL DE LA TEMPÉRATURE DU FIL SANS CONSIDÉRER LA GÉNÉRATION
% DE CHALEUR CAUSÉ PAR LE CHANGEMENT DE PHASE
Ts_sp = (R*I^2 + m*Cp*Ts0/delta_t + Tinf/Rther) /...
        (m*Cp/delta_t + 1/Rther);

% CONDITION NÉCESSAIRE POUR ENTRER DANS LA BOUCLE ITÉRATIVE
testT=1;
Ts1=Ts_sp;
a=10;

% INITIALISATION DE LA VARIABLE DIVERGENCE
div=zeros(1000,2);

% VARIABLE ITÉRATIVE
iter=0;

% INITIALISATION DE LA VARIABLE DIVERGE
diverge=0;

% BOUCLE DE CONVERGENCE. ELLE CALCULE LA TEMPÉRATURE GÉNÉRÉE
% PAR LE CHANGEMENT DE PHASE
while testT ~ 0;

    %AUGMENTATION DE LA VARIABLE ITER
    iter=iter+1;

    % APPEL DE LA FONCTION WONGB POUR LE CALCUL DES DÉFORMATION
    % ET DE LA PROPORTION DE MARTENSITE
    [def,def_elas,def_tr, phi, Api_Aqk_Dik] =
    wongb(sig0,sig,Ts0,Ts1,phi0,Api_Aqk_Dik_0);

    % CALCUL DE LA PROPORTION DE MARTENSITE GLOBALE
    phi_m=sum(sum(phi))/nb;

    % CALCUL DE LA TEMPÉRATURE AVEC LA PROPORTION DE MARTENSITE
    Ts2 = (R*I^2 + m*Cp*Ts0/delta_t + Tinf/Rther +...
           m*H*(phi_m-phi0_m)/(delta_t)) / (m*Cp/delta_t + 1/Rther);

    % STOCKAGE DES RÉSULTATS DE L'ITÉRATION ITER
    div(iter,:) = [Ts1,Ts2];

    if abs(Ts1-Ts2) < .01;

```

```

% CONVERGENCE OBTENUE, SORTIE DE LA BOUCLE
testT=0;
else
    % DIVERGENCE, ON INCRÉMENTE LA TEMPÉRATURE
    % VERS LE HAUT OU LE BAS SELON LE DERNIER RÉSULTAT

    % ON CHAUFFE
    if Ts_sp > Ts0
        Ts2 = Ts1 - abs(Ts1-Ts2)/a;

        % LIMITE SUPÉRIEURE
        if Ts2 >= Ts_sp
            a = abs(a)+100;
            Ts2=Ts1;
        end

        %LIMITE INFÉRIEURE
        if Ts2 <= Ts0
            a = abs(a)+100;
            a = -a;
            Ts2=Ts1;
        end

    % ON REFROIDIT
    else
        Ts2 = Ts1 + abs(Ts1-Ts2)/a;
        % LIMITE SUPÉRIEURE
        if Ts2 >= Ts0
            a = abs(a)+100;
            a = -a;
            Ts2=Ts1;
        end

        %LIMITE INFÉRIEURE
        if Ts2 <= Ts_sp
            a = abs(a)+100;
            Ts2=Ts1;
        end

    end
end
Ts1=Ts2;

% DIVERGENCE
if iter > 1000
    % SORTIE DE LA BOUCLE
    testT=0;
    diverge=1;
end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% S'IL Y A DIVERGENCE ALORS ON PREND LES VALEURS OÙ LA DIFFÉRENCE
% ENTRE Ts1 ET Ts2 EST LA PLUS PETITE. CEPENDANT, ON CRÉE UN FICHIER
% ERREUR QUI PERMET DE VOIR SI LA DIVERGENCE À CAUSER DES ANAOMALIES
% DANS LES RÉSULTATS
if diverge==1
    diff = div(:,1)-div(:,2);
    test=10;
    for i=1:1000
        if test > diff(i,1)
            test=diff(i,1);
            a=i;
        end
    end
    Ts1=div(a,1);
    Ts2=div(a,2);
    [def,def_elas,def_tr, phi, Api_Aqk_Dik] =
wongb(sig0,sig,Ts0,Ts1,phi0,Api_Aqk_Dik_0);

    % ÉCRITURE DE L'ERREUR
    name=['erreur.txt']
    fid=fopen(name,'a')
    fprintf(fid,'divergence au temps %4.2f \n',t)
    fprintf(fid,'Ts1 = %3.2f et Ts2 = %3.2f\n\n',Ts1,Ts2)
    fclose(fid)
end

```

## fichier main

```
% CE SCRIPT FAIT APPEL À LA FONCTION ACTUATEUR ET CRÉE
% UNE MATRICE DE CHARGEMENT
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% INITIALISATION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
clc
close all
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% TEXTURES DE L'AMF %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% TÉLÉCHARGEMENT DE LA MATRICE angl QUI CONTIENT
% LES ANGLES D'EULER DE TOUS LES GRAINS
load angl.mat
```

```
% COMPTE LE NOMBRE DE GRAIN DE LA MATRICE angl
nb=length(angl);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CONDITIONS INITIALES %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% DÉBUTE LE TEST AVEC 100% AUSTÉNITE DONC
%      '--> T > Af
%      '--> SIG = 0
%      '--> Api_Aqk_Dik = 0
Api_Aqk_Dik=zeros(3,3,nb);
phi=zeros(nb,3);
T0=308;
sig0=0;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% FICHIER DE CHARGEMENTS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% FICHIER DE TYPE *.TXT CE DERNIER POSSEDE
% 3 COLONNES --> 1 = CONTRAINTE
%      '--> 2 = TEMPÉRATURE
%      '--> 3 = INCRÉMENTATION
```

```
% WORKING DIRECTORY
init_dir=cd
```

[illegible]

```

% CALCUL DES DÉFORMATIONS À PARTIR DE LA FONCTION WONGB()

% VARIABLE DE STOCKAGE POUR L'IMPRESSION FINALE
imprime=[];

% BOUCLE QUI PERMET LE CALCUL DE TOUTES LES ITÉRATIONS PRÉALABLEMENT
% DÉFINIS DANS LA MATRICE DE CHARGEMENT
for b = 2:length(charge)

    % IMPRESSION DE LA PROGRESSION DU CALCUL
    affiche_iteration=sprintf('%d sur %d',b-1,length(charge));
    disp(affiche_iteration)

    % CONVERSION DE LA CONTRAINTE SOUS FORME MATRICIEL
    % POUR L'ITÉRATION b
    sig0=charge(b-1,1);
    sig=charge(b,1);
    sig=[sig      0      0      0
          0      0      0      0
          0      0      0      0];
    sig0=[sig0      0      0      0
           0      0      0      0
           0      0      0      0];

    % TEMPÉRATURE INITIALE POUR L'ITÉRATION b
    T0=charge(b-1,2);

    % TEMPÉRATURE APPLIQUÉE POUR L'ITÉRATION b
    T=charge(b,2);

    % APPEL DE LA FONCTION WONGB QUI CALCUL LES DÉFORMATIONS
    [def,def_elas,def_tr,phi, Api_Aqk_Dik] =
wongb(sig0,sig,T0,T,phi,Api_Aqk_Dik);

    % SAUVEGARDE DES DONNÉES

    imprime=[imprime;sig(1,1),T,def(1,1),def_elas(1,1),def_tr(1,1),sum(phi(
: ,1))/nb,sum(phi(:,2))/nb,sum(sum(phi))/nb,b];

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      IMPRESSION      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% AFFICHAGE DES RÉSULTATS NUMÉRIQUE À L'ÉCRAN
[m,n]=size(imprime);
for i=1:m
    disp(sprintf('%3.0f\t\t %3.0f\t\t %3.3f\t\t %3.3f\t\t %3.3f\t\t
%1.2f\t\t %1.2f\t\t %1.2f\t\t %4.0f\t\t %1.2f',imprime(i,:)))
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% IMPRESSION DES DONNÉES EXPÉRIMENTAUX %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX OBTENUS

```

```

experimental=['t273.txt';
              't283.txt';
              't293.txt';
              't303.txt';
              't308.txt';
              't318.txt';
              't328.txt';
              't338.txt'];

test=0;
for i=1:length(experimental)
    if strcmpi(File_Name,experimental(i,:))==1
        test=i;
        break
    end
end
if test~=0
    %working directory
    init_dir=cd;
    %répertoire ou se trouve les fichiers
    cd (strcat(init_dir,'\donnéesexpérimentales'))
    exp=load(experimental(test,:));
    cd (init_dir); %retour au working directory
    plot(exp(:,1),exp(:,2),'--b');
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% IMPRESSION DES RÉSULTATS %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

figure(1)
hold on;
plot(imprime(:,3),imprime(:,1),'k')

whitebg('w');
set(gcf,'color',[1,1,1])% couleur du graphe
% title({'Diagramme de phase';''},'fontsize',20,...
%       'FontName','arial','color','k','FontWeight','bold')

xlabel({'';'';'';'Déformation'},'fontsize',20,'FontName','arial','color',
'','k')
ylabel({'Contrainte
(MPa)';''},'fontsize',20,'FontName','arial','color','k')
axis([0,.07,0,inf])
set(gca,'box','on',...
      'fontsize',16)

```

fichier main\_TC

```
% CE SCRIPT FAIT APPEL A LA FONCTION ACTUEUR ET CREE
% UNE MATRICE DE CHARGEMENT POUR
```

```

clear
clc
close all

```

```
% *****
%          TEXTURES DE L'AMF          %
% *****
% TÉLÉCHARGEMENT DE LA MATRICE angl QUI CONTIENT
% LES ANGLES D'EULER DE TOUS LES GRAINS
load angl.mat
```

```
% COMPTE LE NOMBRE DE GRAIN DE LA MATRICE angl
nb=length(angl);
```

```

%*****FICHIER DE CHARGEMENTS*****
%*****
% FICHIER DE TYPE *.LVM PRODUIT À L'AIDE DE LABVIEW LORS DES
% ESSAIS EFFECTUER SUR LE TEST BENCH
% colonne 1 = LVDT
% colonne 2 = LC
% colonne 3 = T1
% colonne 4 = T2
% colonne 5 = T3
% colonne 6 = T4
% colonne 7 = Ampere
% colonne 8 = T5
% colonne 9 = T6
% colonne 10 = T4
% colonne 11 = temps

```

```
% WORKING DIRECTORY
init_dir=cd;
```

```
% PASSAGE AU RÉPERTOIRE DE CHARGEMENT
cd (strcat(init_dir, '\chargement'));
```

```
% CHOIX DU FICHER
name=uigetfile('*.lvm')
```



```

% TÉLÉCHARGEMENT DU FICHIER
data=load(name);
data=data(1:200,:);

%RETOUR AU WORKING DIRECTORY
cd (init_dir);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                                CONVERSION DES DONNÉES                                %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

data(:,1)=data(:,1)/-70; % nun --> %
data(:,2)=data(:,2)/((pi*.5*.5)/4); % N --> Mpa
data(:,3)=data(:,3)+273; % C --> K
data(:,4)=data(:,4)+273; % C --> K
data(:,5)=data(:,5)+273; % C --> K
data(:,6)=data(:,6)+273; % C --> K
data(:,8)=data(:,8)+273; % C --> K
data(:,9)=data(:,9)+273; % C --> K
data(:,10)=0;

% AJUSTEMENT DU TEMPS À ZÉRO
ajustement=data(1,11);
data(:,11)=data(:,11)-ajustement;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                                CALCULE DE LA TEMPÉRATURE AMBIANTE AUTOUR DE L'AMF EN EFFECTUANT %
%                                LA MOYENNE DES QUATRES THERMOCOUPLES                                %
Tinf_moyen = (data(:,3) + data(:,4) + data(:,5) + data(:,6)) / 4;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                                CONDITIONS INITIALES                                %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% LES CONDITIONS DE DÉPARTS SONT À CONTRAINTE NULLE, À TEMPÉRATURE
% SUPÉRIEURE À AF, DONC EN AUSTÉNITE --> PHI=0
sig0=[0      0      0
      0      0      0
      0      0      0];
Ts0=308;
phi=zeros(nb,3);
Api_Aqk_Dik=zeros(3,3,nb);
t=0;
I=0;

% TEMPÉRATURE DE L'ENVIRONNEMENT INITIALE
Tinf = Tinf_moyen(1,1);

```

```

% CHARGE APPLIQUÉE PENDANT LA PREMIÈRE ITÉRATION
sig=data(1,2);
sig=[0      0      0
      0      sig    0
      0      0      0];

% PERMET DE TROUVER LES CONDITION DE DÉPART, C'EST-À-DIRE LES
% PROPORTION DE MARTENSITE ET Api_Aqk_Dik
[def,def_elas,def_tr, phi, Api_Aqk_Dik] = wongb(...
      sig0,sig,Ts0,Tinf,phi,Api_Aqk_Dik);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% TC et Déformation %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CACUL PAR ITÉRATION DES DÉFORMATIONS ET DU TRANSFERT DE CHALEUR
% À PARTIR DE LA FONCTION WONGB() ET ACTUATEUR()

% MATRICE DE CHARGEMENT --> cc = [I,SIG,TEMPS,Tambiant]
cc=[data(:,7),data(:,2),data(:,11),Tinf_moyen(:,1)];

% VARIABLE DE STOCKAGE POUR L'IMPRESSION FINALE
imprime=[];

% BOUCLE QUI PERMET LE CALCUL DE TOUTES LES ITÉRATIONS PRÉALABLEMENT
% DÉFINIS DANS LA MATRICE DE CHARGEMENT
for j = 2:length(cc)
    % IMPRESSION DE LA PROGRESSION DU CALCUL
    iteration=sprintf('%d de %d',j,length(cc));
    disp(iteration)

    % CONVERSION DE LA CONTRAINTE SOUS FORME MATRICIEL
    % POUR L'ITÉRATION j
    sig0=cc(j-1,2);
    sig=cc(j,2);
    sig=[sig      0      0
          0      0      0
          0      0      0];
    sig0=[sig0      0      0
           0      0      0
           0      0      0];
    % COURANT APPLIQUÉE POUR L'ITÉRATION j
    I=cc(j,1);

    % DELTA TEMPS POUR L'ITÉRATION j
    delta_t=cc(j,3)-cc(j-1,3);

    % TEMPS DE L'ITÉRATION j
    t=cc(j,3);

    % TEMPÉRATURE AMBIANTE POUR L'ITÉRATION j

```



### **ANNEXE 3**

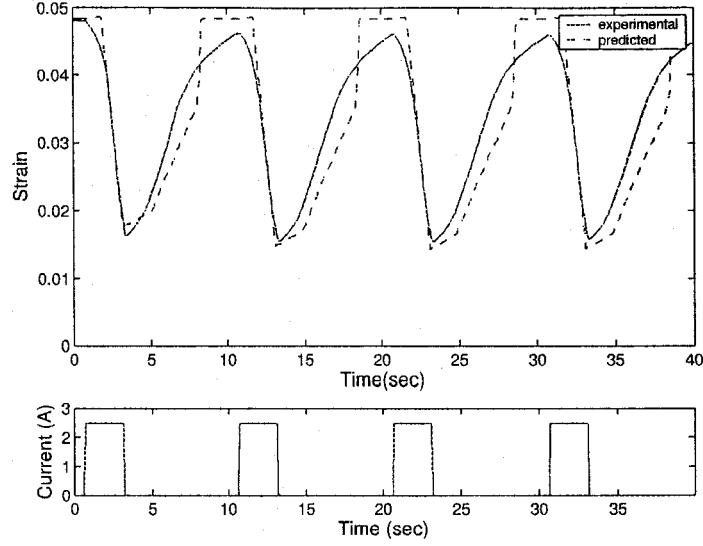
**Article de la conférence SPIE 2005**

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thank Alexander Volkov from the Research Institute of Mathematics and Mechanics (NIIMM) of the Saint-Petersburg State University for the helpful discussions concerning the micromechanical strain calculations. This work was partially financed by the Defence R&D Canada Technology Investment Fund under the project "Supersonic Missile Flight Control by Manipulation of the Flow Structure using Micro-Actuated Surfaces" and by École de technologie supérieure under the "Programme d'incitation pour diplômés de l'ÉTS".

## REFERENCES

1. Patoor, E., Eberhardt, A., Berveiller, M., "Thermomechanical Behaviour of Shape Memory Alloys", *Arch. Mech.*, Vol. 40, 1988, pp. 775-794.
2. Terriault, P., Volkov, A., Trochu, F., "Sec. 16.4 Structure-Analytical Model" in *Shape Memory Alloys: Fundamentals, Modeling and Applications*, V. Brailovski, S. Prokoshkin, P. Terriault, F. Trochu Eds., Université de Québec, École de technologie supérieure, 2003, pp. 586-615.
3. Liang, C., Rogers, C.A., "One-Dimensional Thermomechanical Relations for Shape-Memory Materials", *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, Vol. 1, 1990, pp. 207-234.
4. Liang, C., Rogers, C.A., "Design of Shape Memory Alloy Actuators", *J. Mech. Design*, Vol. 114, 1992, pp. 223-230.
5. Brinson, L.C., "One-Dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloys: Thermomechanical Derivation with Non-Constant Material Functions and Redefined Martensite Internal Variables", *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, Vol. 4, 1993, pp. 229-242.
6. Brinson, L.C., Bekker, A., Hwang, S., "Deformation of Shape Memory Alloys Due to Thermo-Induced Transformation", *J. Intell. Mater. Syst. and Struct.*, Vol. 7, 1996, pp. 97-106.
7. Huang, W., "Modified Shape Memory Alloy (SMA) Model for SMA Wire Base Actuator Design", *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, Vol. 10, 1999, pp. 221-231.
8. Tanaka, K., Nagaki, S., "A Thermomechanical Description of Materials with Internal Variables in the Process of Phase Transformation", *Ingenieur-Archiv*, Vol. 51, 1982, pp. 287-299.
9. Tanaka, K., "A Phenomenological Description on Thermomechanical Behaviour of Shape Memory Alloys", *J. Pressure Vessel Tech.*, Vol. 112, 1990, pp. 158-163.
10. Mase, G.E., Mase, G.T., *Continuum Mechanics for Engineers*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992, p. 167.
11. Shape Memory Materials, Eds. Otsuka, K. and Wayman, C.M., *Cambridge University Press*, 1999, p. 284.
12. Prokoshkin, S.D., Kaputkina, L.M., Morozova, T.V., et al., "Anisotropic dilatometric effects in titanium inkelide after high-temperature thermomechanical treatment and their interaction with shape memory effects", *Phys. Met. Metallography*, Vol. 81, 1996, pp. 223-228.
13. Knowles, K.M., Smith, D.A., "The Crystallography of the Martensitic Transformation in Equiatomic Nickel Titanium", *Acta Metallurgica*, Vol. 29, 1981, pp. 101-110.
14. Tauchert, T., *Energy Principles in Structural Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., New York, NY, 1974, p. 29.
15. Shanin, A.R., Meckl, P.H., Jones, J.D., Thrasher, M.A., "Enhanced Cooling of Shape Memory Alloy Wires Using Semiconductor Heat Pump Modules", *J. Intell. Mater. Syst. and Struct.*, Vol. 5, 1994, pp. 95-104.
16. Bhattacharyya, A., Lagoudas, D.C., Wang, Y., Kinra, V.K., "On the role of thermoelectric heat transfer in the design of SMA actuators: theoretical modeling and experiment", *Smart Mater. Struct.*, Vol. 4, 1995, pp. 252-263.
17. Luo, Y., Takagi, T., Maruyama, S., Yamada, M., "A Shape Memory Alloy Actuator Using Peltier Modules and R-Phase Transition", *J. Intell. Mater. Syst. and Struct.*, Vol. 11, 2000, pp. 503-511.
18. Nygård, M., "Number of grains necessary to homogenize elastic materials with cubic symmetry", *Mechanics of Mater.*, Vol. 35, 2003, pp. 1049-1057.
19. Gere, J.M., Weaver, W., *Matrix Algebra for Engineers*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, NY, 1965, p. 141.



**Figure 8.** Comparison between predicted and experimental results for a 0.5 mm dia. SMA wire ( $T_{As} = 296\text{K}$  and  $T_{Af} = 303\text{K}$ ) under a constant load of 5.42 kg and actuated by a current with a 25% duty cycle at 0.1 Hz with  $T_a = 277\text{K}$ . Wire contracts on application of current.

## APPENDIX A. ROTATION MATRIX

A rotation matrix that transforms a tensor from a coordinate system  $(xyz)$  to an arbitrary coordinate system  $(x''''y''''z''')$  can be derived by successive application of a rotation matrix<sup>19</sup> such as

$$r_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

where  $r$  in this case rotates the coordinate system  $xy$  to  $x'y'$ . Rotations in other planes can be carried out by suitable adjustment of the elements in  $r$ .

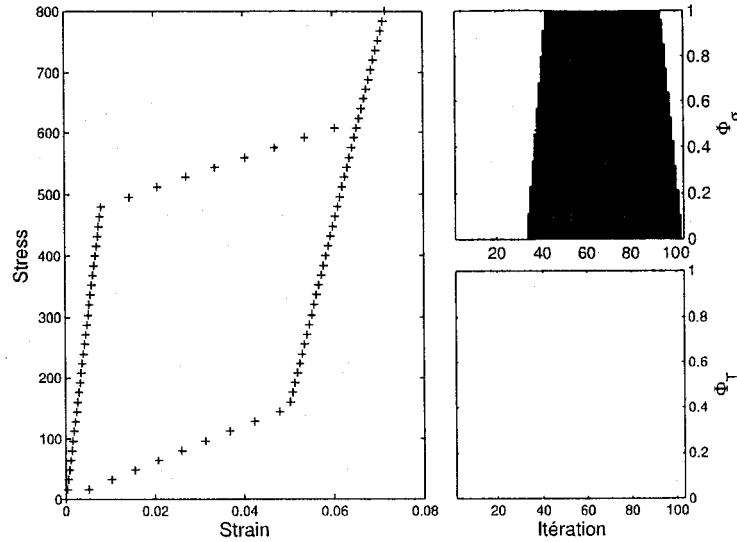
In this study, we employ the following rotational sequence, to rotate a coordinate system in 3D space:

1. Rotate in a counter-clockwise direction by  $\theta_1$  about the  $z$ -axis so that the  $x$ -axis is aligned with the  $x'$ -axis where  $x'y'z'$  is the coordinate system upon the first rotation.
2. Rotate in a counter-clockwise direction by  $\theta_2$  about the  $x'$ -axis so that the  $z'$ -axis is aligned with the  $z''$ -axis where  $x''y''z''$  is the coordinate system upon the second rotation.
3. Rotate in a counter-clockwise direction by  $\theta_3$  about the  $z''$ -axis so that the  $y''$ -axis is aligned with the  $y'''$ -axis where  $x'''y'''z'''$  is the coordinate system upon the final rotation.

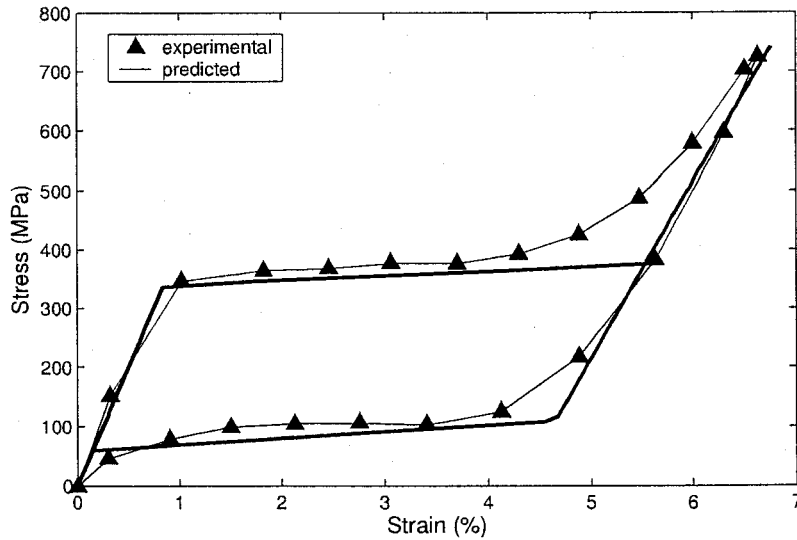
The resultant coordinate rotation matrix is

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_3 - s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 & s\theta_1 c\theta_3 + c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 & s\theta_2 s\theta_3 \\ -(s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3) - c\theta_1 s\theta_3 & c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3 & s\theta_2 c\theta_3 \\ s\theta_1 s\theta_2 & -(c\theta_1 s\theta_2) & c\theta_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

where  $c$  is  $\cos$  and  $s$  is  $\sin$ .



**Figure 6.** Mechanical behavior at the austenite finish temperature. Stress vs. strain shown on the left, stress-induced ( $\Phi^\sigma$ ) and temperature-induced ( $\Phi^T$ ) martensite fraction vs. iteration number shown on the right.



**Figure 7.** Comparison between predicted and experimental uniaxial tensile results at  $T = 308\text{K}$  for a 0.5 mm dia. SMA wire where  $T_{As} = 296\text{K}$  and  $T_{Af} = 303\text{K}$

## 6. CONCLUSIONS

A hybrid micro-macro-mechanical SMA model, based on concepts presented by Likhatchev for microstructural modeling and Brinson for transformation kinetics modeling, has been developed. A micromechanical constitutive formulation is useful if it necessary to account for the microstructural differences that exist between different shape memory materials. The introduction of a frequency distribution function in the micromechanical model provides a convenient way to quantify texture. The study showed that at least 200 grains are required in a representative volume element. It was also demonstrated that the degree of orientation or texture has a large effect on the strain predictions. The results of a parametric and experimental study demonstrated that the model is able to predict the expected behavior of a SMA wire under constant temperature conditions and constant load-low frequency cycling conditions.

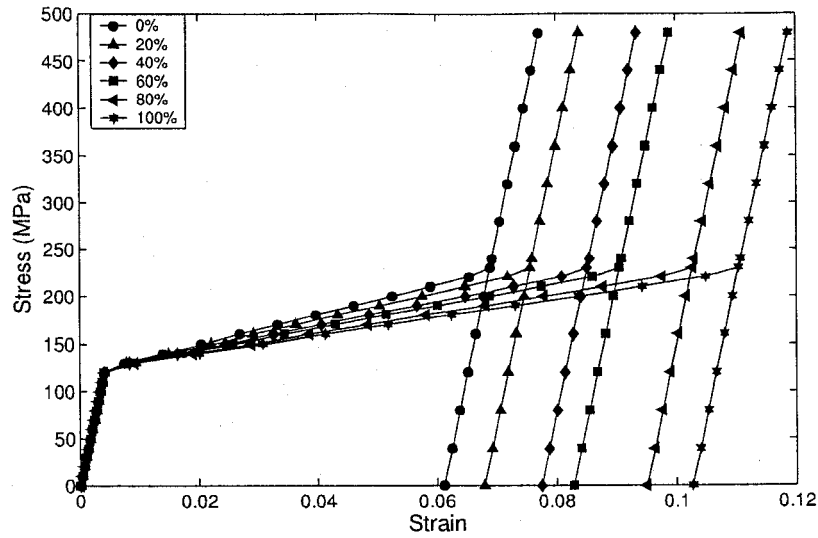


Figure 4. Effect of texture on residual strain.

## 5. EXPERIMENTAL RESULTS

One dimensional model predictions were compared with experimental tensile test and cyclic results. The properties for the 0.5 mm dia. SMA wire are found in Table 1. For a temperature where the material is superelastic (see Fig. 7), the model correctly predicted most of measured stress-strain behavior. Hysteresis behavior, however, was dominated by the linear interpolation used in eq. 14. Figure 8 shows the results for cyclic testing. A testbench was constructed to apply 2.5 A with a duty cycle of 25% at 0.1 Hz to the SMA wire under a constant load of 5.42 kg. The ambient temperature was kept at 277 K with thermoelectric modules. The model was able to predict the strain behavior during heating better than during cooling. There was a tendency to underpredict the strain during the beginning of the cooling cycle and then overpredict it at the end of the cycle.

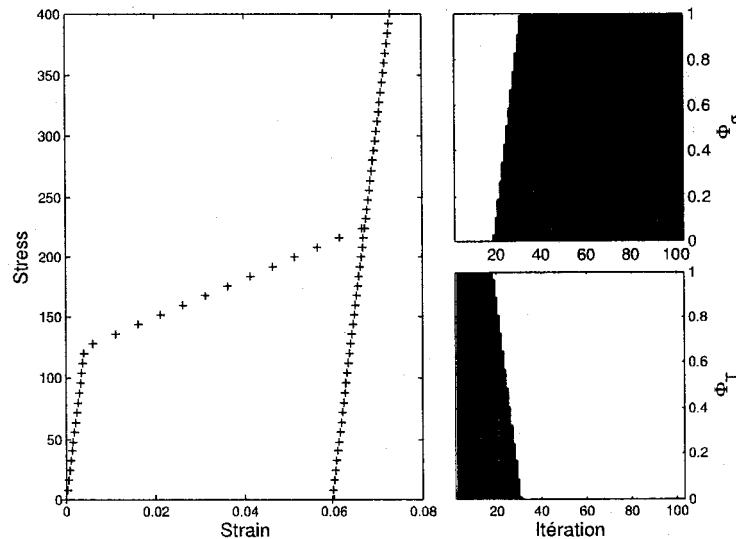


Figure 5. Mechanical behavior below the martensite finish temperature. Stress vs. strain shown on the left, stress-induced ( $\Phi^\sigma$ ) and temperature-induced ( $\Phi^T$ ) martensite fraction vs. iteration number shown on the right.



#### 4.1. Effect of Total Number of Grains

Equation 6 is expressed in terms of the number of grains contained in the representative volume element. Ten thousand numerical uniaxial trials were run to provide statistical results for a one-dimensional SMA where the grain orientations were generated at random. Figure 3 shows the trend in standard deviation from mean strain for numbers of grains varying from 1 to 300. Initially, for small numbers of grains ( $1 < N < 50$ ), the variability is high because the orientation of the grains has a great influence on the calculated strain of each trial. As the numbers of grains increase ( $100 < N < 250$ ), the greater number of grains homogenize the calculated strain in each trial with the result that the overall variability is reduced. Nygård's<sup>18</sup> carried out a similar study for multi-phase cubic materials using finite element analyses. He showed that approximately 200 grains were needed to adequately define a representative volume element. Our results agree with Nygård's conclusion.

#### 4.2. Effect of Texture

The ability to impose a texture in the model was accomplished through a frequency distribution function (eq. 7). To study the sensitivity of the predictions on  $f^n$ , a model containing 200 randomly oriented grains in a cone half-angle of 10 deg. or a solid angle of 0.096 sr in the direction of a uniaxial stress was set up. Figure 4 shows that for a SMA at  $T < T_{Mf}$  with 200 randomly oriented grains (0% in Fig. 4), the residual strain is approximately 6.1%. If a certain percentage of grains was oriented in-line with the uniaxial stress (40% for example), the residual strain increased. If all grains were directly oriented (100%), a residual strain of 10.5% is obtained.

#### 4.3. Effect of Temperature

The predicted behavior for a SMA when the temperature is below the martensite finish temperature is shown in Fig. 5. The initial slope of the stress-strain curve represents the elastic behavior of martensite up to  $\epsilon = 0.004$ . The  $\Phi^T = 1$  while  $\Phi^\sigma = 0$  because  $\sigma_{Ms}^*$  has not been reached yet. From iteration  $i = 20$  onwards,  $\Phi^T$  decreases while  $\Phi^\sigma$  increases as  $\sigma_{Mf}^*$  is reached. The slope of the stress-strain curve flattens with the increase in martensite fraction. After  $\Phi^\sigma = 1$ , the stress-strain slope is linear again. Upon unloading, a residual strain remains because  $T < T_{As}$ .

Predicted superelastic behavior is given in Fig. 6. The initial stress-strain behavior up to  $\epsilon = 0.008$  has a slope equivalent to the austenite modulus. When  $\sigma > \sigma_{Ms}$ , stress-induced martensite forms and  $\Phi^\sigma$  increases. When  $\sigma = \sigma_{Mf}$ ,  $\Phi^\sigma = 1$ . For  $\sigma > \sigma_{Mf}$ , a linear elastic behavior again appears. The material unloads in a linear manner until  $\sigma_{As}$  is encountered at iteration  $i = 90$ . Afterwards,  $\Phi^\sigma$  decreases to zero as  $\sigma \rightarrow \sigma_{Af}$ .

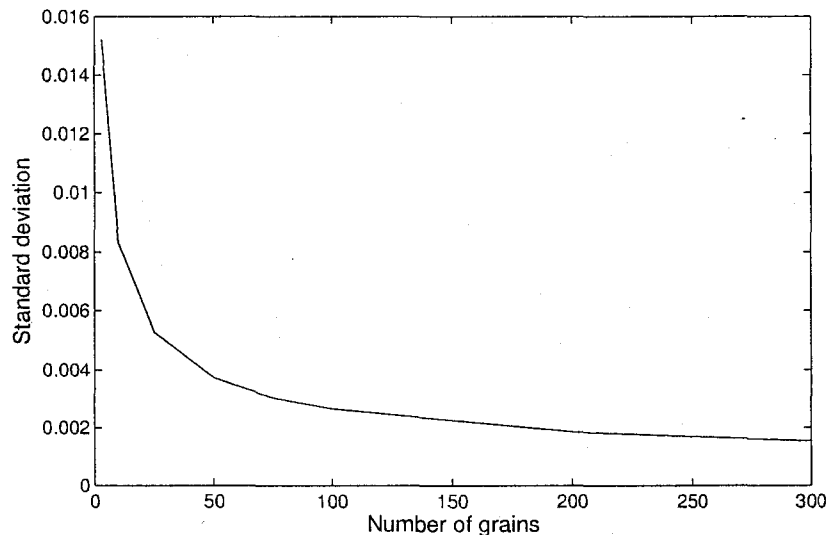


Figure 3. Standard deviation in residual strain as a function of total number of grains

The stored energy must account for the exo- and endothermic behavior of the SMA as it is heated above  $T_{As}$  or cooled below  $T_{Ms}$ . Assuming constant values for the SMA's specific heat and latent heat of formation

$$\frac{dE}{dt} = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \rho H \frac{d\Phi}{dt} \quad (22)$$

where  $\rho$  is density ( $\text{kg/m}^3$ ),  $C_p$  is specific heat ( $\text{J/kg}\cdot\text{K}$ ) and  $H$  is latent heat of formation ( $\text{J/kg}$ ). The negative sign in the second term gives a endothermic reaction as the martensite changes to austenite and the martensite fraction decreases.

#### 4. PARAMETRIC STUDY

A parametric study was undertaken to gain a better appreciation for the three parameters, namely grain number, texture and temperature, that most affect the mechanical behavior predictions. Parameters such as modulus, Poisson's ratio and thermal expansion coefficient also affect the predicted behavior. However, their influence is not included in the parametric study because their values can easily be measured through mechanical property testing. The constants employed in the parametric study are given in Table 1.

**Table 1.** Constants for parametric and experimental study

Constant	Symbol	Reference	Parametric	Expt.
austenite modulus (GPa)	$E^A$	eq. 2	60	40
austenite Poisson ratio (-)	$\nu^A$	eq. 2	0.33	0.3
austenite thermal expansion coeff. ( $\mu\epsilon/\text{K}$ )	$\alpha^A$	eq. 2	11	11
<hr/>				
martensite modulus (GPa)	$E^M$	eq. 2	30	30
martensite Poisson ratio (-)	$\nu^M$	eq. 2	0.33	0.3
martensite thermal expansion coeff. ( $\mu\epsilon/\text{K}$ )	$\alpha^M$	eq. 2	6.6	6.6
B2 austenite unit cell length (nm)	$a_0$	eq. 8	0.3015	0.3015
B19' monoclinic width (nm)	$a$	eq. 8	0.2889	0.2889
B19' monoclinic depth (nm)	$b$	eq. 8	0.4120	0.4120
B19' monoclinic height (nm)	$c$	eq. 8	0.4622	0.4622
B19' monoclinic distortion angle (deg.)	$\beta$	eq. 8	96.8	96.8
<hr/>				
maximum martensite fraction (-)	$\Phi_{mx}$	eq. 14	1	1
minimum martensite fraction (-)	$\Phi_{mn}$	eq. 14	0	0
austenite finish temperature (K)	$T_{Af}$	-	325	303
austenite start temperature (K)	$T_{As}$	-	300	296
martensite start temperature (K)	$T_{Ms}$	eq. 18	200	< 213
martensite finish temperature (K)	$T_{Mf}$	eq. 18	175	< 213
<hr/>				
critical martensite start stress at $T_{Ms}$ (MPa)	$\sigma_{Ms}^*$	Fig. 1	100	n/a
critical martensite finish stress at $T_{Ms}$ (MPa)	$\sigma_{Mf}^*$	Fig. 1	200	n/a
austenite slope (MPa/K)	$C_A$	Fig. 1	6	8
martensite slope above $T_{Ms}$ (MPa/K)	$C_M$	Fig. 1	4	5
martensite slope below $T_{Ms}$ (MPa/K)	$C_M^*$	Fig. 1	-0.5	n/a
<hr/>				
thermal resistance ( $\text{kW/m}^2\text{K/m}$ )	$R_{th}$	eq. 21	-	364
electrical resistance ( $\text{k}\Omega/\text{m}^3$ )	$R_{el}$	eq. 21	-	3.03
density ( $\text{kg/m}^3$ )	$\rho$	eq. 22	-	6500
specific heat (J/kg)	$C_p$	eq. 22	-	450
latent heat of formation (J/kg)	$H$	eq. 22	-	25000

Refer also to Figs. 1 and 2 for definition of phase diagram constants.

Constants: 'Parametric' used in Sec. 4, 'Expt.' used in Sec. 5.  $a_0, a, b, c, \beta$  from Ref. 13.

terms are zero. If the stress is outside the critical transformation stress limits ( $\sigma_{Mf}, \sigma_{Ms}, \sigma_{As}, \sigma_{Af}$ ), both first and second terms are zero while the other terms can be non-zero and positive depending on the value of the current,  $i$ , and previous,  $i - 1$ , stress states.

$$\begin{aligned}\Phi_i^\sigma &= \left[ \frac{\Phi_{mx} - \Phi_{mn}}{\sigma_{Mf} - \sigma_{Ms}} (\sigma_i - \sigma_{Ms}) + \Phi_{mn} \right] \cdot H_0[\sigma_i - \sigma_{i-1}^M] \cdot H_0[\Phi_{mx} - \Phi_{i-1}^\sigma] \cdot H_0[\sigma_{Mf} - \sigma_i] \\ &+ \left[ \frac{\Phi_{mx} - \Phi_{mn}}{\sigma_{As} - \sigma_{Af}} (\sigma_i - \sigma_{Af}) + \Phi_{mn} \right] \cdot H_0[\sigma_{i-1}^A - \sigma_i] \cdot H_0[\Phi_{i-1}^\sigma - \Phi_{mn}] \cdot H_0[\sigma_i - \sigma_{Af}] \\ &+ \Phi_{mx} \cdot H_0[\sigma_i - \sigma_{Mf}] \cdot H_0[\sigma_{Mf} - \sigma_{i-1}] + \Phi_{mn} \cdot H_0[\sigma_{Af} - \sigma_i] \cdot H_0[\sigma_{i-1} - \sigma_{Af}] \\ &+ \Phi_{i-1}^\sigma \cdot H_0[\sigma_{i-1}^M - \sigma_i] \cdot H_0[\sigma_i - \sigma_{i-1}^A]\end{aligned}\quad (14)$$

$$\text{with } \sigma_{i-1}^M = \frac{\sigma_{Mf} - \sigma_{Ms}}{\Phi_{mx} - \Phi_{mn}} (\Phi_{i-1}^\sigma - \Phi_{mn}) + \sigma_{Ms} \quad (15)$$

$$\sigma_{i-1}^A = \frac{\sigma_{As} - \sigma_{Af}}{\Phi_{mx} - \Phi_{mn}} (\Phi_{i-1}^\sigma - \Phi_{mn}) + \sigma_{Af} \quad (16)$$

$$\text{and } H_0(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 & : x \geq 0 \end{cases} \quad (17)$$

where  $\Phi_i^\sigma$  is the current martensite fraction,  $\Phi_{mx}$  is the maximum martensite fraction,  $\Phi_{mn}$  is the minimum martensite fraction,  $\sigma_{Mf}$  is the critical stress (Pa) at the martensite finish temperature,  $\sigma_{Ms}$  is the critical stress (Pa) at the martensite start temperature,  $\sigma_i$  is the applied stress at iteration  $i$ ,  $\sigma_{i-1}$  is the applied stress at iteration  $i - 1$ ,  $\sigma_{As}$  is the critical stress (Pa) at the austensite start temperature and  $\sigma_{Af}$  is the critical stress (Pa) at the austensite finish temperature.

As can be seen from eq. 14, an iterative method must be used to solve for the stress-induced martensite fraction. This requirement means that global strain (eq. 1) must also be solved in an iterative fashion.

### 3.2.2. Autoaccomodation Martensite Fraction

The autoaccomodation martensite fraction,  $\Phi^T$ , is assumed to be linearly dependent on temperature between the martensite start and finish temperatures.

$$\Phi^T = \frac{T_{Ms} - T}{T_{Ms} - T_{Mf}} \quad (18)$$

where  $T_{Ms}$  is the martensite start temperature and  $T_{Mf}$  is the martensite finish temperature. The stress-induced martensite will form even if  $T > T_{Ms}$ . Therefore the fraction of autoaccomodation martensite is subject to the inequality

$$\Phi^T \leq \Phi_{mx} - \Phi^\sigma \quad (19)$$

where  $\Phi_{mx}$  is the maximum martensite fraction.

### 3.3. Thermal Model

Assuming the shape memory alloy is a wire with a large length to diameter ratio and is uniformly heated from resistive heating, the one-dimensional heat transfer equation for heat flow in the radial direction is<sup>15-17</sup>

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} \quad (20)$$

The heat balance is comprised of internal heat generation and heat flow across the control volume boundaries. Thus

$$\frac{dq}{dt} = I^2 R_{el} + R_{th}(T - T_a) \quad (21)$$

where  $I$  is the applied current (A),  $R_{el}$  is the wire resistance per unit volume (ohms/m<sup>3</sup>),  $T$  is the wire temperature (K),  $T_a$  is the ambient temperature (K),  $R_{th}$  is the convective thermal resistance per unit length (W/(m<sup>2</sup>·K)/m).

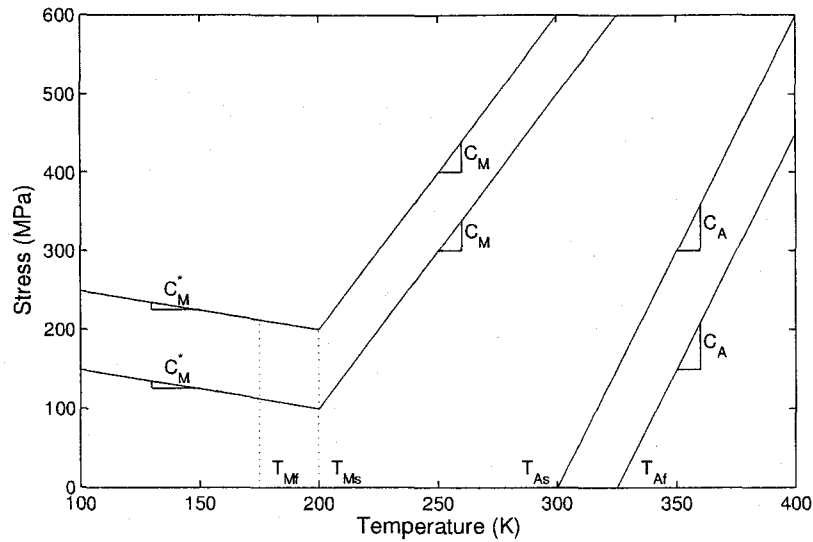


Figure 1. Critical stress diagram for martensite transformation as a function of temperature

### 3.2.1. Stress-Induced Martensite Fraction

The stress-induced martensite fraction is calculated as a function of critical stress at a specific temperature. As mentioned in Sec. 2, Tanaka<sup>9</sup> chose to describe the martensite fraction versus critical stress relationship with an exponential function while Brinson<sup>5</sup> chose instead a cosine function. We have elected to use a linear function in the form of a Heaviside model as proposed by Likhatchev.<sup>2</sup> A schematic phase transformation hysteresis diagram is shown in Fig. 2.

The Heaviside function, eq. 17, allows an incremental martensite phase equation to be written in a compact form. The martensite fraction for a stress at iteration  $i$  is calculated with eqs. 14 to 16. The Heaviside function acts as a switch for the five terms in eq. 14. If  $\sigma_{Mf} < \sigma < \sigma_{Ms}$ , the first term will be non-zero and positive while the other terms are zero. If  $\sigma_{As} < \sigma < \sigma_{Af}$ , the the second term is non-zero and negative while the other

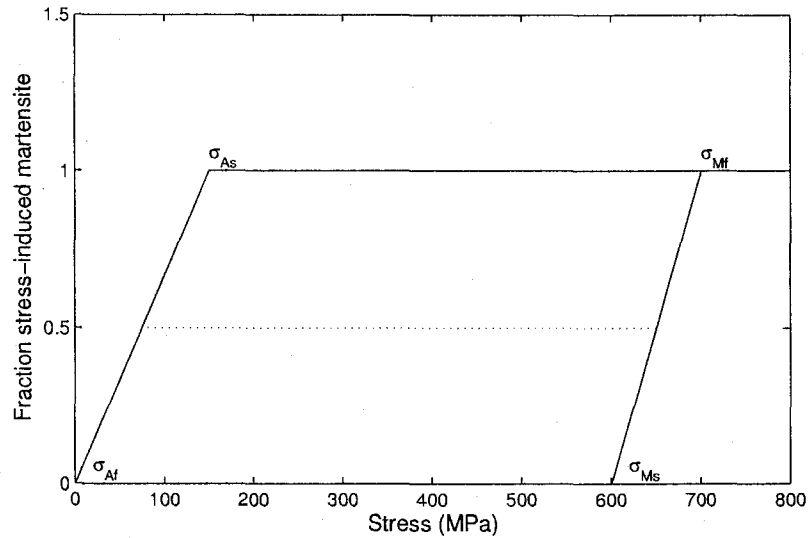


Figure 2. Stress-induced martensite transformation as a function of critical stress at constant temperature

### 3.1.2. Stress-Induced Martensite Strain

Crystallographic studies on martensite phase transformation have determined that the B2 austenite changes from a face-centred tetragonal (fct) lattice to a B19' monoclinic lattice.<sup>13</sup> Using the unit length of a fct lattice as a reference, a tensor known as the Bain deformation tensor has been defined to quantify the monoclinic distortion of the fct lattice. Since our constitutive model is developed in terms of strain, it is more convenient to have a Bain tensor that is also formulated in terms of strain. Assuming that the unit cell undergoes small displacements, the Bain strain tensor, or as it is called here the stress-induced strain, is

$$\epsilon_{ij}^{\sigma n} = \begin{bmatrix} \frac{b}{\sqrt{2}a_0} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c \sin \beta}{\sqrt{2}a_0} - 1 & \frac{c \cos \beta}{2\sqrt{2}a_0} \\ 0 & \frac{c \cos \beta}{2\sqrt{2}a_0} & \frac{a}{a_0} - 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

where  $a_0$  is the B2 fct cell length (m) and  $a, b, c, \beta$  are the monoclinic cell parameters (m, m, m, deg., respectively) that describe the B19' distorted grain geometry.

The principal strains for eq. 8 can be calculated by finding the roots of the characteristic equation<sup>14</sup>

$$|\epsilon_{ij}^{\sigma n} - \epsilon_{ij}^{\sigma p n} \delta_{ij}| = 0 \quad (9)$$

with the direction cosines for each of the principal strains determined through

$$[\epsilon_i^{\sigma n} - \epsilon^{\sigma p n}]x_i^\eta = 0 \quad (10)$$

where  $x_i^\eta$  are the direction cosines for principal strains  $\epsilon^{\sigma p n}$  with  $\eta = 1$  to 3.

To deal with the how the normal and shear strains in eq. 8 sum on a grain by grain basis, we propose that eq. 6 be re-stated in terms of principal strains so that only normal strains are summed on a grain by grain basis before being averaged in the global coordinate system. The stress-induced grain strain becomes

$$\epsilon_{kl}^{\sigma n} = R_{kp}^n R_{lq}^n \epsilon_{pq}^{\sigma p n} \quad (11)$$

where  $R_{kp}^n R_{lq}^n$  is the rotation of the principal direction coordinate system to the local coordinate system and that from observation in eqs. 10 and 11

$$\epsilon_{pq}^{\sigma p n} = \begin{bmatrix} \epsilon^{\sigma p_1 n} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{\sigma p_2 n} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^{\sigma p_3 n} \end{bmatrix} \quad (12)$$

where the convention  $\epsilon^{\sigma p_1 n} > \epsilon^{\sigma p_2 n} > \epsilon^{\sigma p_3 n}$  is maintained.

It was stated at the end of Sec. 3.1 that  $\epsilon^{\sigma n}$  represents the average strain of the 24 possible variant strains. Thus, in reality, the placement of  $\epsilon^{\sigma p_1 n}$ , for example, could be at index (1,1), (2,2) or (3,3) in eq. 12. The same can be said for  $\epsilon^{\sigma p_2 n}$  and  $\epsilon^{\sigma p_3 n}$ . To determine where  $\epsilon^{\sigma p_1 n}$  is relative to the principal direction axes, we use the rule

$$\max[x_\eta \cdot \vec{X}_i] \quad \text{for } \vec{X}_i \equiv \sigma_{p1} \quad (13)$$

which says that  $\epsilon^{\sigma p_1 n}$  will be assigned to the principal direction  $x_\eta$  that is closest to global principal direction  $\vec{X}_i$  which corresponds to the first principal stress  $\sigma_{p1}$ .

### 3.2. Phase Transformation Kinetics

The martensite transformation kinetics is defined on a global basis using the model proposed by Liang<sup>3</sup> and later modified by Brinson.<sup>5</sup> Following Brinson's work, we define a critical stress-temperature diagram from constant temperature tensile tests carried out over a temperature range  $T < T_{M_f}$  to  $T > T_{A_f}$  where  $T_{M_f}$  is the martensite finish temperature (K) and  $T_{A_f}$  is the austenite finish temperature (K). A schematic phase diagram is shown in Fig. 1. Sections 3.2.1 and 3.2.2 will discuss how the stress-induced martensite fraction,  $\Phi^\sigma$ , and the autoaccommodation martensite fraction,  $\Phi^T$ , (see eq. 3) are determined from the phase diagram.

where  $\epsilon$  is the global strain,  $\Phi$  is the total martensite fraction,  $\epsilon^A$  is the strain in the austenite phase and  $\epsilon^M$  is the strain in the martensite phase.

Assuming that we remain within the linear elastic limits of the SMA, the elastic strain in the austenite is given by the usual linear thermo-elastic constitutive equation<sup>10</sup>

$$\epsilon_{ij}^A = \frac{1}{E^A} [(1 + \nu^A)\sigma_{ij} - \nu^A\delta_{ij}\sigma_{kk}] + \delta_{ij}\alpha_{ij}^A\Delta T \quad (2)$$

where  $E^A$  is the austenite elastic modulus (Pa),  $\nu^A$  is the austenite Poisson ratio,  $\sigma$  is the applied stress (Pa),  $\alpha^A$  is the austenite thermal expansion coefficient ( $K^{-1}$ ).

The martensite strain consists of an thermo-elastic component, a detwinned or stress-induced phase transformation component and a twinned or temperature-induced phase transformation component. The temperature-induced component has also been called an autoaccommodation phase. The martensite strain is

$$\epsilon_{ij}^M = \epsilon_{ij}^{el} + \frac{\Phi^T}{\Phi}\epsilon_{ij}^T + \frac{\Phi^\sigma}{\Phi}\epsilon_{ij}^\sigma \quad (3)$$

where  $\epsilon^{el}$  is the elastic strain,  $\epsilon_{ij}^T$  is the temperature-induced strain,  $\epsilon_{ij}^\sigma$  is the stress-induced strain,  $\Phi^T$  is the temperature-induced martensite fraction and  $\Phi^\sigma$  is the stress-induced martensite fraction. The total martensite fraction is

$$\Phi = \Phi^T + \Phi^\sigma \quad (4)$$

The thermo-elastic strain,  $\epsilon^{el}$ , is described by the same equation as the austenite elastic strain (eq. 2) except martensite materials properties are used.

The temperature-induced strain,  $\epsilon^T$ , is assumed to be zero because previous studies<sup>11,12</sup> have shown that the dilatational strains due to the transformation from austenite to twinned martensite are on the order of 0.1% to 0.2%. Therefore, eq. 3 becomes

$$\epsilon_{ij}^M = \epsilon_{ij}^{el} + \frac{\Phi^\sigma}{\Phi}\epsilon_{ij}^\sigma \quad (5)$$

The stress-induced strain,  $\epsilon_{ij}^\sigma$ , is a preferential deformation of the martensite variants in response to an external stress. The strain is given by

$$\epsilon_{ij}^\sigma = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f^n(\theta_1, \theta_2, \theta_3) R_{ik}^n R_{jl}^n \epsilon_{kl}^{\sigma n} \quad (6)$$

where  $N$  is the number of grains,  $f^n(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  is a frequency distribution function,  $R_{ik}^n R_{jl}^n$  is the coordinate rotation matrices that rotate the local grain coordinate system to the global coordinate system and  $\epsilon^{\sigma n}$  is the detwinned strain of grain  $n$  in the local coordinate system. Sections 3.1.1 and 3.1.2 discuss  $f^n(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  and  $\epsilon^{\sigma n}$  in more detail. The derivation of  $R$  is given in Appendix A.

Equation 6 states that a Reuss-type averaging scheme is valid for estimating the stress-induced strain. The implicit assumptions are: 1) continuity is maintained across grain boundaries and 2)  $\epsilon^{\sigma n}$  is the average strain of the 24 possible variant strains.

### 3.1.1. Frequency Distribution Function

Every shape memory alloy has some texture depending on the amount of cold work that it experiences during its manufacturing. Texture effects on detwinned strain are taken into account through a frequency function  $f^n$ . For any given material,

$$\sum_{n=1}^N f^n(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 1 \quad (7)$$

where  $f^n(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  is taken as the frequency that a grain  $n$  will have a local orientation with Euler angles  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  in a population of  $N$  grains. If a material has no texture, the frequency of occurrence is uniform so  $f^n = 1/N$ .

macroscopic deformation of the SMA was determined through a weighted summation of all the grain deformations where the weighting was described through a statistical distribution function.

Likhatchev's micromechanical model<sup>2</sup> was similar to Patoor's in the sense that a statistical approach was used to average the contribution of each grain's strain for the RVE. The passage from the micro-scale deformation to the macro-scale deformation was accomplished by a Reuss-type of mixture law to sum the individual phase contributions. Likhatchev introduced the concept of effective temperature to describe the phase transformation kinetics as opposed to Patoor's formulation in terms of Gibbs potential. In its simplest form, the effective temperature was defined as the addition of the actual grain temperature with a temperature increment that is equivalent to the grain under a zero stress-strain condition. The martensite transformation law was expressed as a series of Heaviside functions based on temperature.

Many phenomenological constitutive models have been developed over the years. These types of models have been developed to reduce the need for detailed mathematical description and characterization of the microstructure and to allow its use in other areas such as control algorithm synthesis. Several researchers (Liang,<sup>3,4</sup> Brinson,<sup>5,6</sup> Huang<sup>7</sup>) have refined Tanaka's thermodynamically-based model<sup>8,9</sup> which is expressed in terms of moduli, thermoelastic and transformation tensors. The Tanaka formulation has been employed in many studies because the mechanical and phase transformation effects on the SMA stress state can be treated separately. Assuming small strains, the stresses arising from an imposed strain and temperature on known volume fractions of austenite and martensite can readily be calculated using the well-known linear thermo-elastic constitutive equation found in solid mechanics textbooks.<sup>10</sup> Thus, most of the effort has been placed on developing compact phase transformation laws that accurately describe the formation of martensite as a function of temperature and stress.

Tanaka<sup>9</sup> chose an exponential function for his forward and reverse transformation laws. Liang<sup>3</sup> selected, instead, to use a cosine function in conjunction with the critical stress-temperature phase diagram. At the same time, Liang introduced a maximum residual strain term to the Tanaka formulation so that shape memory behavior could be predicted at temperatures higher than the martensite start temperature. Brinson<sup>5</sup> divided the martensite fraction into a twinned and detwinned component to correct a second shortcoming of the Tanaka equation below the martensite start and finish temperatures. The twinned martensite fraction was dependent only on temperature while the detwinned fraction was dependent on stress and temperature. This change permitted correct accounting of martensite fraction below the martensite finish temperature. Like Liang, Brinson chose to use a cosine form of the transformation law. Huang<sup>7</sup> attempted to simplify modeling by linearizing the critical stress-martensite fraction experimental data before fitting a function. Since the linearization was accomplished by using logarithms, Huang's function was an exponential like Tanaka's.

On one hand, a micromechanical approach is attractive because it provides a framework that can be used to account for the effects that physical features, such as grain orientation and texture, have on SMA mechanical behavior. On the other hand, SMA transformation kinetics have been successfully described on a macroscopic scale in a numerically tractable manner. A hybrid micro-macro-mechanical model could provide a way to describe the influence that microstructural features have on macroscopic mechanical behavior without requiring the phase transformation kinetics to be described on a microscopic scale.

### 3. MODEL FORMULATION

The hybrid micro-macro-mechanical SMA model proposed here is a combination of concepts originally presented by Likhatchev<sup>2</sup> for microstructural modeling and Brinson<sup>5</sup> for modeling of transformation kinetics. The smallest size scale considered in the model corresponds to a grain. The representative volume element is scaled on the order of hundreds of grains.

#### 3.1. Micromechanical Constitutive Model

At the macroscopic level, the global strain is described by a Reuss-type rule of mixtures law

$$\epsilon_{ij} = (1 - \Phi)\epsilon_{ij}^A + \Phi\epsilon_{ij}^M \quad (1)$$

# Hybrid micro-macro-mechanical constitutive model for shape-memory alloys

Franklin C. Wong<sup>a</sup>, Olivier Boissonneault<sup>b</sup> and Patrick Terriault<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Defence R&D Canada - Valcartier, Val Belair, Quebec, Canada;

<sup>b</sup>École technologie supérieure, Montreal, Quebec, Canada

## ABSTRACT

A substantial reduction in the size of control actuation systems employed in today's aerospace vehicles can enhance overall vehicle performance by reducing envelope volume requirements and inert weight. Functional materials such as shape memory alloys (SMA's) offer the opportunity to create compact, solid-state actuation systems by virtue of the material's ability to convert electrical energy to thermal energy to mechanical energy within its microstructure. A hybrid micro-macro-mechanical SMA model is developed for future closed-loop actuator development studies. The constitutive model is a combination of concepts originally presented by Likhatchev for microstructural modeling and Brinson for modeling of transformation kinetics. Global strain of the heterogeneous solid or polycrystal, where the grains are assumed to be randomly oriented, was calculated by averaging the elastic, thermal, stress-induced and autoaccommodation strains of each grain over the total material volume. The introduction of a frequency distribution function in the micromechanical model provided a convenient way to quantify texture. The model was successfully tested under constant temperature conditions and constant load-low frequency cycling conditions.

**Keywords:** SMA, constitutive, micromechanical, stress-induced, autoaccommodation, transformation, kinetics

## 1. INTRODUCTION

The main objectives for new technologies in aerospace have always been increased speed and range of aerovehicles and reduced volume and weight of vehicle components. Actuation systems for control surfaces have traditionally been based on hydraulic or electromechanical systems. If a substantial reduction in the size of control actuation systems currently employed in today's aerospace vehicles can be obtained, overall vehicle performance will be enhanced by the reduction in the envelope volume requirements and inert weight. Shape memory alloys (SMA's) offer the opportunity to create compact, solid-state actuation systems because of their ability to convert electrical energy into mechanical energy through Joule heating. Development of closed-loop control microactuators based on shape memory alloys requires a tractable, constitutive law that accurately describes the relationship between force, displacement and temperature in the material. This paper describes a hybrid micro-macro-mechanical model that has been developed for this purpose.

## 2. BACKGROUND

Constitutive equations for materials can generally be classified according to the size of the representative volume element (RVE) considered in the modelling effort. In the micromechanical regime, the RVE is sized on the scale of the grains, cells or constituents that make up the heterogeneous material. In the macromechanical regime, the RVE is orders of magnitude larger than the material's microstructure.

One of the first micromechanical models was published by Patoor.<sup>1</sup> He described the behavior of a SMA through a thermodynamic model where the fractions of the austenite and the twenty-four martensite variants were determined by minimization of the Gibbs potential. The thermodynamic potential of an individual grain was expressed in terms of the local martensite volume fraction, temperature and stress state. The global or

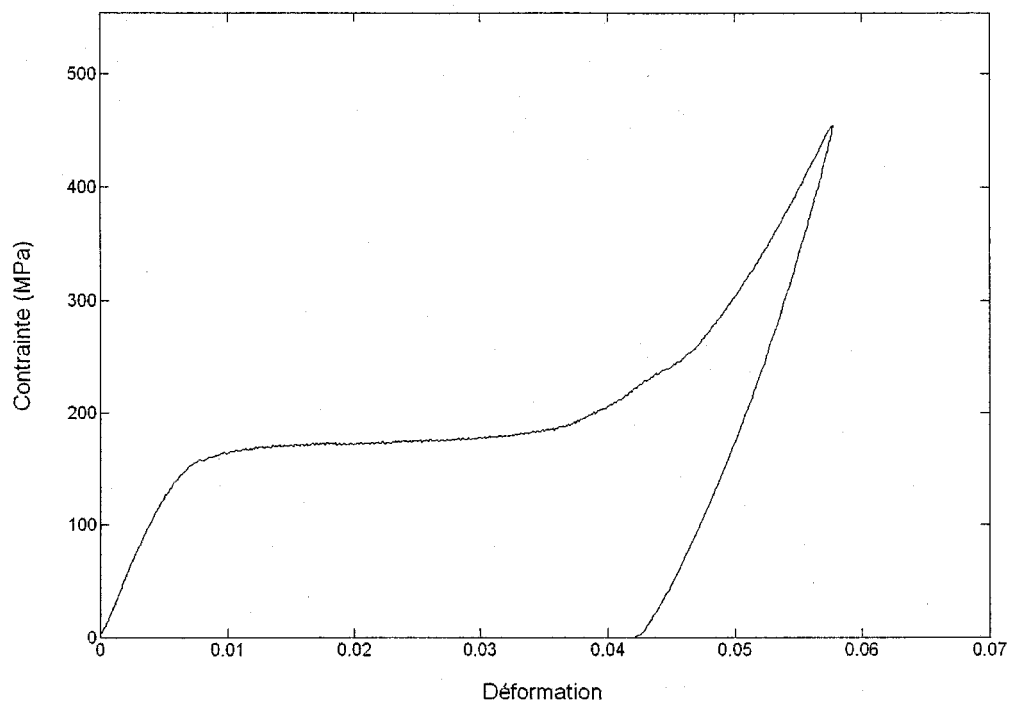
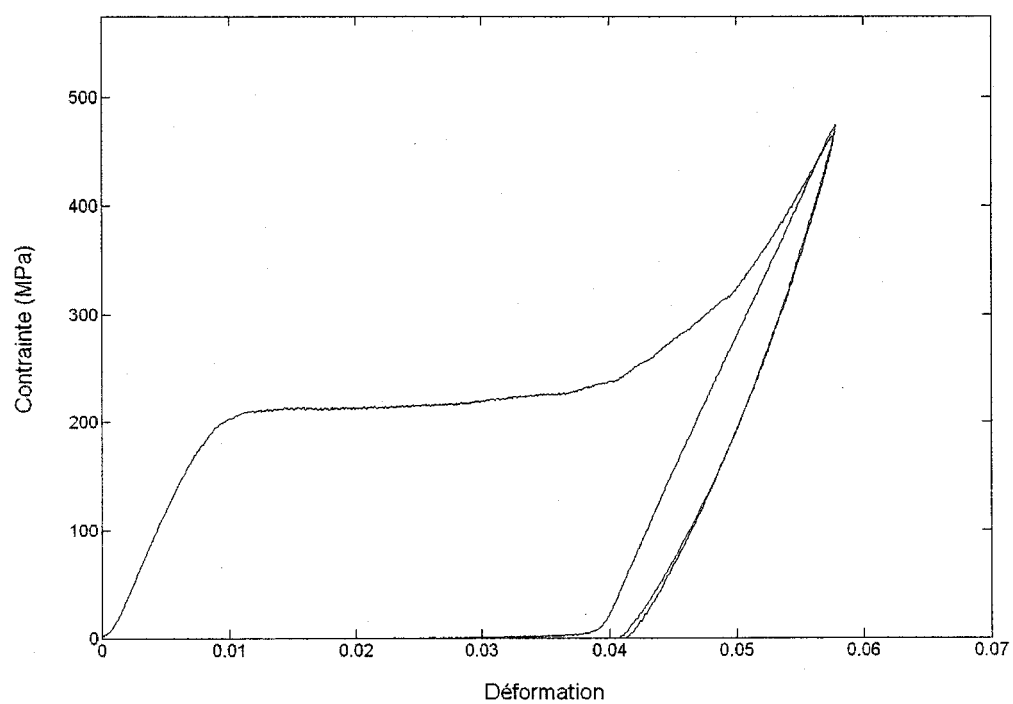
<sup>a</sup> franklin.wong@drdc-rddc.gc.ca, telephone: (418) 844-4000 x.4200

<sup>b</sup> olivier.boissonneault@drdc-rddc.gc.ca; patrick.terriault@etsmtl.ca, telephone: (514) 396-8518



## **ANNEXE 4**

### **Courbes nécessaires à la réalisation du diagramme de phase**

Figure 94 Essai de traction à  $T = 273 \text{ K}$ Figure 95 Essai de traction à  $T = 283 \text{ K}$

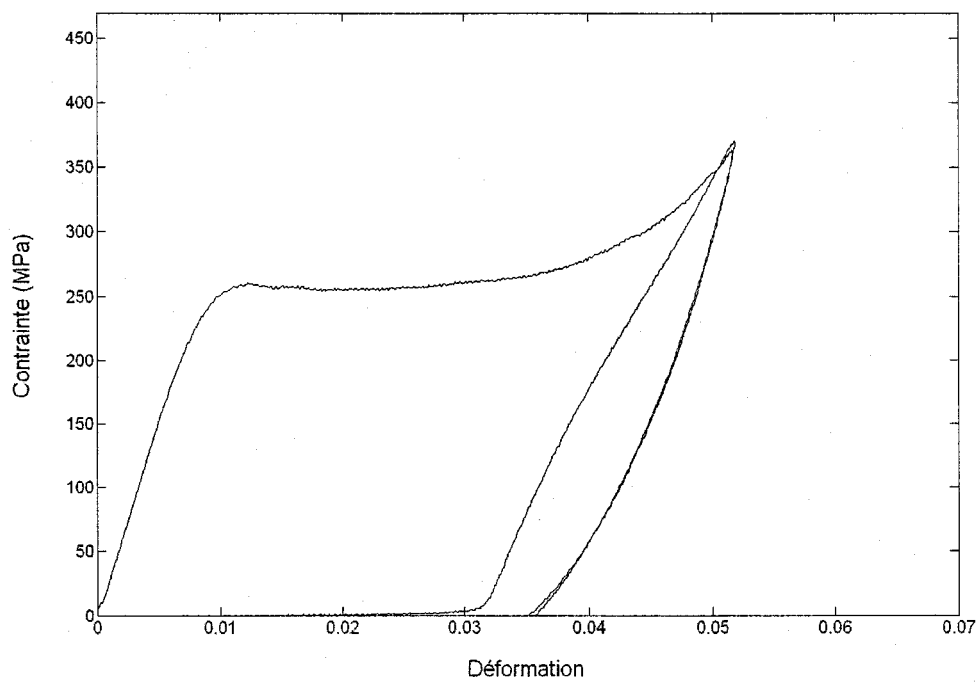


Figure 96 Essai de traction à  $T = 293\text{ K}$

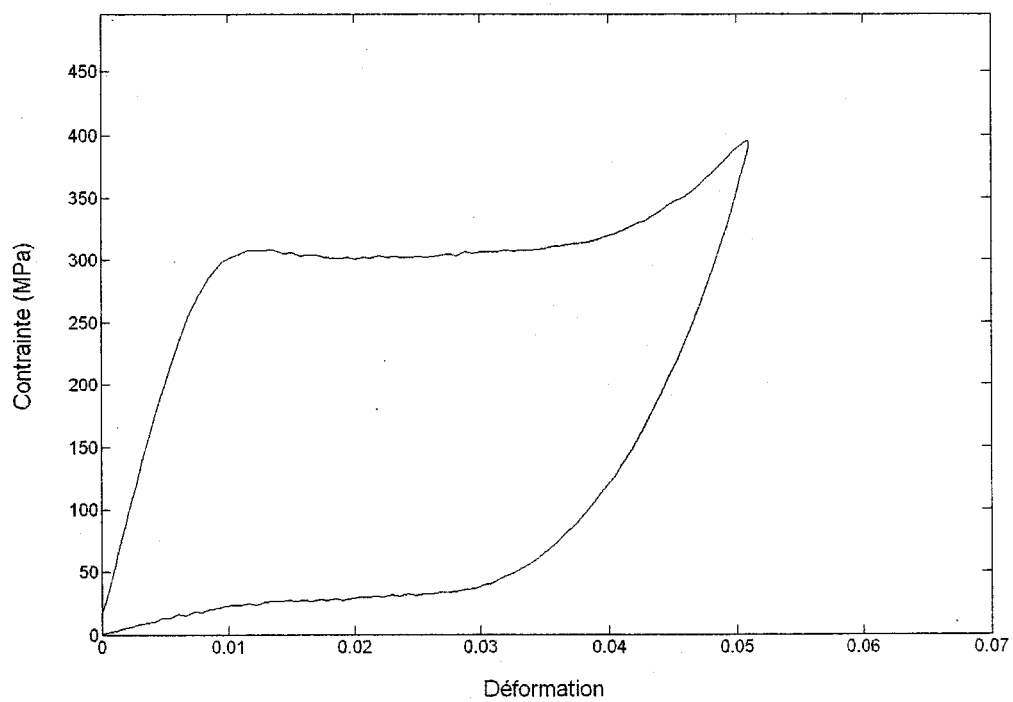


Figure 97 Essai de traction à  $T = 303\text{ K}$

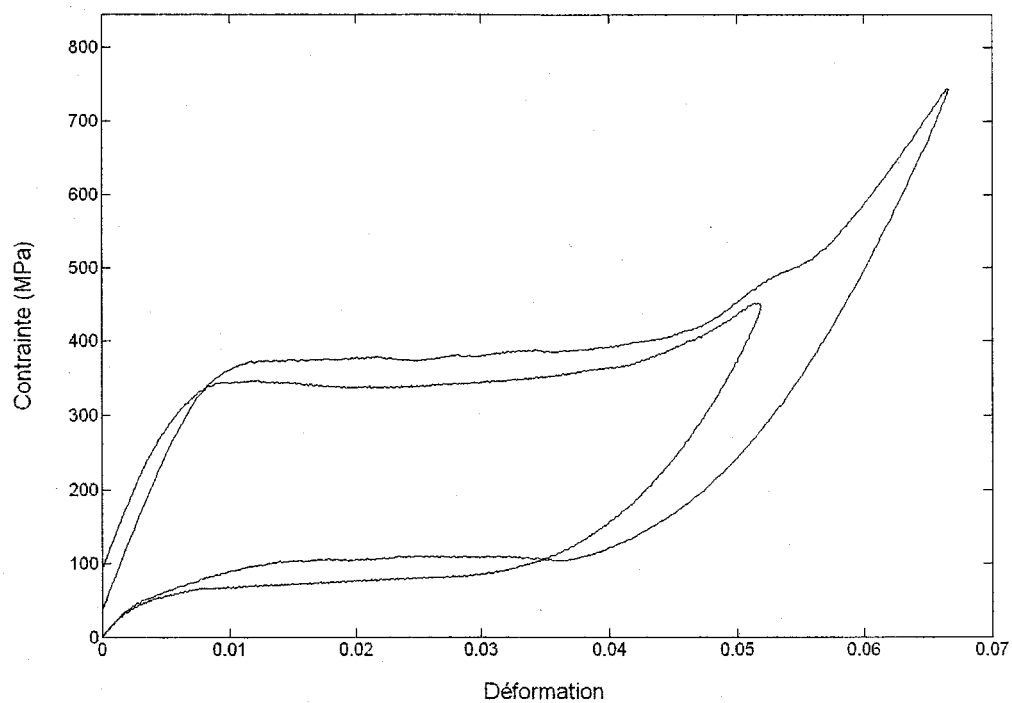


Figure 98 Essai de traction à  $T = 308 \text{ K}$

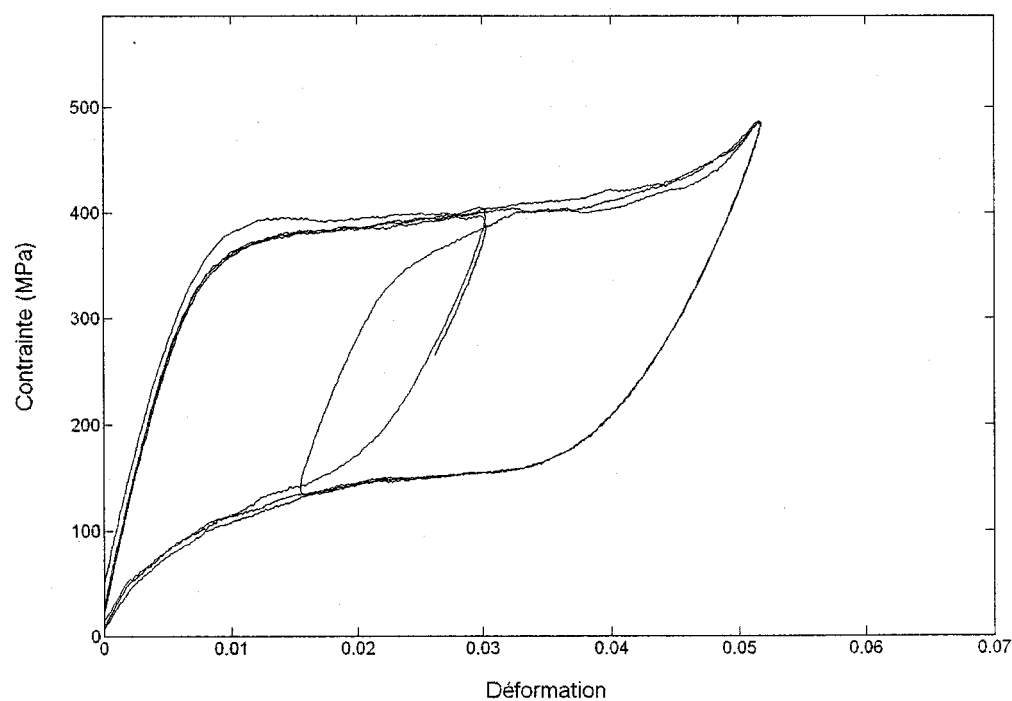


Figure 99 Essai de traction à  $T = 318 \text{ K}$

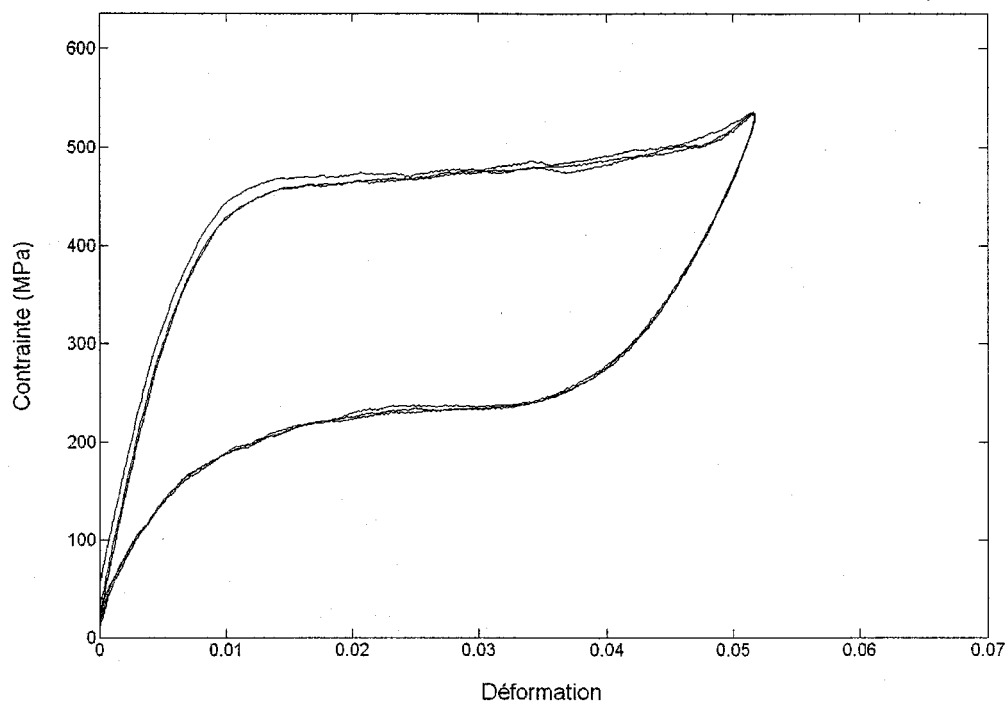


Figure 100 Essai de traction à  $T = 328 \text{ K}$

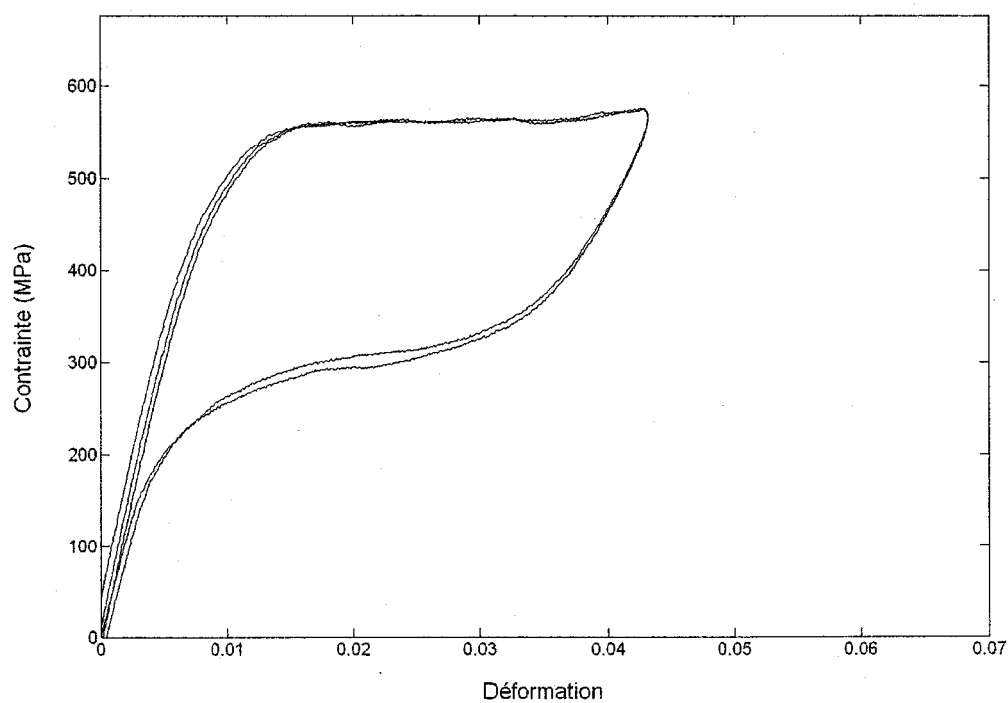


Figure 101 Essai de traction à  $T = 338 \text{ K}$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Liberman, D. S., Scherling, M. A., & Karz, R. W. (1975). Shape memory effects in alloy. *Edit. Perkins J.*, 203-244.
- [2] Ölander, A. (1932). An electrochemical investigation of solid cadmium-gold alloys. *J. Amer. Chem. Soc.*, 54, 3819-3833.
- [3] Kurgumov, G. V. (1948). Diffusionless (martensitic) transformation in alloys. *Journal of Technical Physics*, 18(8), 999-1025.
- [4] Kurgumov, G. V., & Khandros, L. G. (1948). Microstructural study of the kinetics of martensitic transformations in Cu-Zn alloys. *Journal of Technical Physics*, 19(7), 761-768.
- [5] Kurgumov, G. V., & Khandros, L. G. (1949). On the thermoelastic equilibrium at martensitic transformation. *Doklady AN SSSR*, 66(2), 211-214.
- [6] Chang, L. C., & Read, T. A. (1951). Plastic deformation and diffusionless phase changes in metals the gold-cadmium beta phase. *Journal of metals*, 191, 47-52.
- [7] Patoor, E., & Berveiller, M. (1994). *Technologie des alliages à mémoire de forme, comportement mécanique et mise en oeuvre*. Paris: Hermès.
- [8] <http://www.dreamlandresort.com/aircraft/>. (25 avril 2005).
- [9] RYHÄNEN, J. (1999). *Biocompatibility evaluation of Nickel-Titanium shape memory metal alloy*. Ph.D., University of Oulu, Oulu, Finland.
- [10] Castleman, L. S., Motzkin, S. M., Alicandrie, F. P., & Bonawit, V. L. (1976). Biocompatibility of nitinol alloy as an implant material. *J. Biomed. Mater. Res.*, 10, 695-731.
- [11] Cutright, D. E., Bhaskar, S. N., Perez, B., Johnson, R. M., & Cowan, G. S. J. (1973). Tissue reaction to nitinol wire alloy. *Oral Surg. Oral Med. Oral Pathol.*, 35, 578-584.
- [12] Iwabuchi, T., Suzuki, S., Ebina, K., & Honma, T. (1975). Memory clip for intracranial aneurysm surgery. *J. Neurosurg.*, 42, 733-735.
- [13] Simon, M., Kaplow, R., Salzman, E., & Freiman, D. (1977). A vena cava filter using thermal shape memory alloy. *Experimental aspects. Radiology*, 125, 87-94.

- [14] Brailovski, V., Prokoshkin, S., Terriault, P., & Trochu, F. (2003). *Shape memory alloys: Fundamentals, modeling and application*. Montréal: École de Technologie Supérieure.
- [15] <http://membres.lycos.fr/planeteamf/>. (10 juin 2002).
- [16] Barret, D. J. (1995). A one dimensional constitutive model for shape memory alloys. *Journal of intelligent Material Systems and Structures*, 6, 329-337.
- [17] Terriault, P. (1997). *Modélisation par éléments finis du comportement thermomécanique de composantes en alliage à mémoire de forme*. Ph.D., École polytechnique de montréal, Montréal, Canada.
- [18] Sehitoglu, H., Karaman, I., Anderson, R., Zhang, X., Gall, K., Maier, H. J., et al. (2000). Compressive response of NiTi single crystals. *Acta Metallurgica*, 38, 3311-3326.
- [19] Buchheit, T. E., Kumpf, S. L., & Wert, J. A. (1995). Modeling the stress-induced transformation behavior of shape memory alloy single crystals. *Acta Metallurgica*, 43(11), 4189-4199.
- [20] Trochu, F., Brailovski, V., Vachon, N., & Terriault, P. (1997). *Les alliages à mémoire de forme et leurs applications industrielles*. Montréal, Canada: École polytechnique de Montréal.
- [21] <http://intellimat.com>. (16 juin 2003).
- [22] <http://www.science-explorer.de/astronomie/astro.htm>. (25 avril 2005).
- [23] [http://www.pxi.com/praxis\\_publicpages/CLEM.html](http://www.pxi.com/praxis_publicpages/CLEM.html). (25 avril 2005).
- [24] [www.tiniaerospace.com](http://www.tiniaerospace.com). (21 mars 2005).
- [25] [http://antwarp.gsfc.nasa.gov/apod/image/9807/mir\\_sts89\\_big.jpg](http://antwarp.gsfc.nasa.gov/apod/image/9807/mir_sts89_big.jpg). (25 avril 2005).
- [26] <http://www.sports-gear-1.com/Nike-Flexon-Reveal-2-Sunglasses.htm>. (25 avril 2005).
- [27] [http://www.mhvi.org/owners\\_manual/proced\\_angio\\_b.asp](http://www.mhvi.org/owners_manual/proced_angio_b.asp). (25 avril 2005).
- [28] Bailey, S. R., & Boyle, C. T. (Oct. 1, 2002). Endoluminal cardiac and venous valve prostheses and methods of manufacture and delivery thereof, *United States Patent and Trademark Office*. USA.

- [29] <http://perso.wanadoo.net.ma/orthobest/ortho.htm>. (25 avril 2005).
- [30] Ivshin, Y., & Pence, T. J. (1994). Constitutive model for hysteretic phase transition behavior. *International Journal of Engineering Science*, 32(4), 681-704.
- [31] Boyd, J. G., & Lagoudas, D. C. (1996). Thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Part II. The SMA composite material. *International Journal of Plasticity*, 12(7), 843-873.
- [32] Benzaoui, H., Lexcelent, C., Chaillet, N., Lang, B., & Bourjault, A. (1997). Experimental study and modelling of NiTi shape memory alloy wire actuator. *Journal of intelligent Material Systems and Structures*, 8, 619-629.
- [33] Çengel, Y. A., & Boles, M. A. (1998). *Thermodynamics : An Engineering Approach* (3 ed.). USA: McGraw-Hill.
- [34] Viens, M., Brailovski, V., Terriault, P., & Thomas, M. (2003). Sys-865, *Applications des matériaux intelligents*. Montréal: École de Technologie Supérieure.
- [35] Terriault, P., Volkov, A., & Trochu, F. (Eds.). (2003). *Shape memory alloys: Fundamentals, modeling and application*. Montréal: École de Technologie Supérieure.
- [36] Likhatchev, V. A. (1995). Structure-Analytical theory of martensitic unelasticity. *Journal de physique IV*, 5, 137-142.
- [37] Entemeyer, D., Patoor, E., Eberhardt, A., & Berveiller, M. (2001). Erratum to "Strain rate sensitivity in superelasticity" [International Journal of Plasticity, 16 (2000) 1269-1288 ]. *International Journal of Plasticity*, 17, 273-274.
- [38] Entemeyer, D., Patoor, E., Eberhardt, A., & Berveiller, M. (2000). Strain rate sensitivity in superelasticity. *International Journal of Plasticity*, 16(10), 1269-1288.
- [39] Siredey, N., Patoor, E., Berveiller, M., & Eberhardt, A. (1999). Constitutive equations for polycrystalline thermoelastic shape memory alloys. Part I. Intragranular interactions and behavior of the grain. *International Journal of Solids and Structures*, 36(28), 4289-4315.
- [40] Patoor, E. (1993). *Modélisation thermomécanique du comportement des matériaux et structures à mémoire de forme*. Paper presented at the Model. Comport. Mat. et Structures, Montréal.



- [41] Muller, I., & Xu, H. (1991). On the pseudo-elastic hysteresis. *Acta Metallurgica*, 39(3), 263-271.
- [42] Brandon, D., & Rogers, R. C. (1992). Constitutive laws for pseudo-elastic materials. *Journal of intelligent Material Systems and Structures*, 3, 255-267.
- [43] Gillet, Y., Patoor, E., & Berveiller, M. (1992). *Mechanical engineering for shape memory alloys*. Paper presented at the International conference on martensitic transformation (ICOMAT-92), Monterey, USA.
- [44] Viens, F. (2004). *Implantation d'une loi de matériau des alliages à mémoire de forme dans un logiciel d'éléments finis commercial*. Mémoire, École de technologie supérieure, Montréal.
- [45] Terriault, P., Meunier, M.-A., & Trochu, F. (1997). Application of dual kriging to the construction of a general phenomenological material law for shape memory alloys. *Journal of intelligent Material Systems and Structures*, 8(7), 605-618.
- [46] Tobushi, H., Iwanaga, H., Tanaka, K., Hori, T., & Sawada, T. (1992). Stress-strain-temperature relationships of TiNi shape memory alloy suitable for thermomechanical cycling. *JSME international Journal*, 35(3).
- [47] Tanaka, K. (1986). A thermomechanical sketch of shape memory effect : One dimensional tensile behavior. *Res. Mechanica*, 18, 251-263.
- [48] Tanaka, K., Hayashi, T., & Itoh, Y. (1992). Analysis of thermomechanical behavior of shape memory alloys. *Mechanics of Materials*, 13(3), 207-215.
- [49] Tanaka, K., Kobayashi, S., & Sato, Y. (1986). Thermomechanics of transformation pseudoelasticity and shape memory effect in alloys. *International journal of plasticity*, 2, 59-72.
- [50] Liang, C. (1990). *The constitutive modeling of shape memory alloys*. Ph.D., Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, USA.
- [51] Brinson, L. C. (1993). One dimensional constitutive behavior of shape memory alloys : Thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. *Journal of intelligent Material Systems and Structures*, 4, 229-242.

- [52] Liang, C., & Rogers, R. C. (1997). One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials. *Journal of intelligent Material Systems and Structures*, 8, 285-302.
- [53] Brinson, L. C., & Lammering, R. (1993). Finite element analysis of the behavior of shape memory alloys and their applications. *International Journal of Solids and Structures*, 30(23), 3261-3280.
- [54] Brinson, L. C., & Huang, M. S. (1996). Simplifications and comparisons of shape memory constitutive models. *Journal of intelligent Material Systems and Structures*, 7.
- [55] Brinson, L. C., Bekker, A., & Hwang, S. (1996). Deformation of shape memory alloys due to thermo-induced transformation. *Journal of intelligent Material Systems and Structures*, 7, 97-107.
- [56] Huang, W. (1999). Modified shape memory alloy (SMA) model for SMA wire based actuator design. *Journal of intelligent Material Systems and Structures*, 10, 221-231.
- [57] Knowles, K. M., & Smith, D. A. (1980). The crystallography of the martensitic transformation in equiatomic Nickel-Titanium. *Acta Metallurgica*, 29, 101-110.
- [58] Dorlot, J.-M., Baïlon, J.-P., & Masounave, J. (1986). *Des matériaux*. Montréal, Canada: École polytechnique de Montréal.
- [59] Bhattacharya, A. (1993). Comparaison of the geometrically nonlinear and linear theories of martensitic transformation. *Continuum mechanics and thermodynamics*, 5, 205-242.
- [60] Zhao, L. (1997). *Texture development and anisotropic behavior in a Ti-45Ni-5Cu (at %) shape memory alloy*. Mechanical Engineering Faculty of the University Twente, Enschede, Netherlands.
- [61] Hsieh, S. F., & Wu, S. K. (1998). Study on lattice parameters of martensite in Ti-Ni-Zr shape memory alloys. *Journal of Alloys and Compounds*, 270(1-2), 237-241.
- [62] Prokoshkin, S. D., Korotitskiy, A. V., Brailovski, V., Turenne, S., Khmelevskaya, I. Y., & Trubitsyna, I. B. (2004). On the lattice parameters of phases in binary Ti-Ni shape memory alloys. *Acta Materialia*, 52(15), 4479-4492.

- [63] Bhattacharya, K., & Kohn, R. V. (1995). Symmetry, texture and the recoverable strain of shape-memory polycrystals. *Acta Metallurgica*, 44(2), 529-542.
- [64] Mase, G. E., & Mase, G. T. (1999). *Continuum mechanics for engineers*. Floride, USA.
- [65] Takagi, T., Luo, Y., Suzuki, S., Matsumoto, M., & Tani, J. (2001). Modeling and numerical simulation on thermomechanical behavior of SMA plates with two-way shape memory effect. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 12(11), 721-728.
- [66] Mendelson, S. (1985). Low energy dislocation structures caused by martensitic transformations. *Material Science and engineering*, 81, 107-126.
- [67] Roitburd, A. L. (1978). Martensitic transformation as a typical phase transformation in solids. *Solid state physics*, 33, 317-390.
- [68] Wu, K., Yang, F., Pu, Z., & Shi, J. (1996). The effect of strain rate on detwinning and superelastic behavior of NiTi shape memory alloys. *Journal of intelligent Material Systems and Structures*, 7, 138-144.
- [69] Shahin, A. R., Meckl, P. H., & Jones, J. D. (1994). Enhanced cooling of shape memory alloy wires using semiconductor "heat pump" modules. *Journal of intelligent Material Systems and Structures*, 5, 95-104.
- [70] Incropera, F. P., & Dewitt, D. P. (2002). *Fundamentals of heat and mass transfert* (5 ed.). USA: John Willey & Sons.
- [71] Nyards, M. (2003). Number of grains necessary to homogenize elastic materials with cubic symmetry. *Mechanics of materials*, 35, 1049-1057.
- [72] Spinner, S., & Rozner, A. G. (1966). Elastic properties of NiTi a function of temperature. *The journal of the acoustical society of america*, 40(5), 1009-1015.
- [73] Brailovski, V., Trochu, F., & Daigneault, G. (1996). Temporal characteristics of shape memory linear actuators and their application to circuit breakers. *Materials and design*, 17(3), 151-158.
- [74] Lagoudas, D. C., & Ding, Z. (1995). Modeling of thermoelectric heat transfer in shape memory alloy actuators : transient and multiple cycle solutions. *Int. J. Engng Sci*, 33(15), 2345-2364.

- [75] Bhattacharya, A., Lagoudas, D. C., Wang, Y., & Kinra, V. K. (1995). On the role of thermoelectric heat transfer in the design of SMA actuators : theoretical modeling and experiment. *Smart mater. stuct.*, 4, 252-263.
- [76] Cadier, S. (2004). *Étude de la superélasticité d'un fil de nitinol Ti-50.8 at % Ni* (rapport de stage). Montréal: Polytech'Grenoble et École de Technologie Supérieure.
- [77] Pelton, A. R., DiCello, J., & Miyazaki, S. (2000). Optimization of processing and properties of medical-grade nitinol wire. *SMST-2000 Conference proceeding*.
- [78] Piedboeuf, M.-C. (1997). *Étude de fibre NiTi Superélastiques et mise en forme d'un composite avec ces fibres*. Ph.D., École polytechnique de Montréal, Montréal, Canada.
- [79] Miyazaki, S., Imai, T., Igo, Y., & Otsuka, K. (1986). Effect of cyclic deformation on the pseudoelasticity characteristics of Ti-Ni alloys. *Met. Trans.*, 17a, 115-120.
- [80] Prahlad, H., & Chopra, I. (2003). Development of a strain-rate dependent model for uniaxial loading of SMA wires. *Journal of intelligent Material Systems and Structures*, 14, 429-442.
- [81] Iadicola, M. A., & Shaw, J. A. (2004). Rate and thermal sensitivities of unstable transformation behavior in a shape memory alloy. *International journal of plasticity*, 577-605.
- [82] Chaillet, N., LExcellent, C., & Abadie, J. (2003). Étude des temps de chauffage et de refroidissement des alliages à mémoire de forme. *Comptes rendus mécanique*, 332(2), 147-152.
- [83] Luo, Y., Takagi, T., Maruyama, S., & Yamada, M. (2000). A shape memory alloy actuator using Peltier modules and R-phase transition. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 11(7), 503-511.
- [84] Song, G., & Ma, N. (2003). Control of shape memory alloy actuators using pulse-width pulse-frequency (PWPF) modulation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 14(1), 15-22.